

光学笔记

作者：量子态的犹格Yog

注：本篇需要一定的物理知识基础，且只是提炼知识内容，并不能替代教材，请读者注意参考原教材。

第1章 光的干涉

1.1 波动的独立性

光是某一波段的电磁波， c 就是光在真空中的传播速度。

1.电磁波的传播速度：

相对介电常数 ϵ_r ，相对磁导率 μ_r ：

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (1-1)$$

折射率：

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (1-2)$$

2.光的强度：

(1) 光的振动矢量通常取电场强度 $\vec{E}$

(2) 可见光波长： $390 \sim 760nm$ ，对应频率 $7.5 \times 10^{14} \sim 4.1 \times 10^{14}Hz$

(3) 光的能量的传递用**能流密度**描述（即“能量流动的密度”）。

定义：**能流密度**是在单位时间内通过与波的传播方向垂直的单位面积的能量或功率。

波动的**平均能流密度**与**振幅的平方成正比**。

光的强度表示为：

$$\bar{I} = A^2 \quad (1-3)$$

此处的强度理解为相对强度，与**介质的折射率**有关。

介质中的光强度：

$$\bar{I} = nA^2 \quad (1-4)$$

电动力学中，有能流密度：

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

而介质的折射率：

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}, (\mu = \mu_0)$$

n 的两类参数，一个是电场的，一个是磁场的，实际上和“光是电磁波”相关，可以理解为光速降为 $\frac{1}{n}$ ，而光的强度不变，导致光能（理解为可压缩流体）在流动时发生了堆积。

3.机械波的独立性和叠加性

独立性：不同振源发出的波互相不影响各自本身。

叠加性：波的合振动可以简单地叠加各独立波的振动得到。

数学意义：独立的函数满足给定的微分方程，那么它们的和也是方程的解。

干涉：频率相等的波满足连续不中断的条件，在相遇处振动方向几乎沿着同一直线，那么合振动在有些地方加强，另一些地方减弱。

干涉图样：各点振动强度的分布图样。

从能量来讲，独立性是能流的独立性，叠加性是能量标量相加的叠加性。干涉实际上是叠加性的一种突出体现，是振动能量的标量叠加，表现为振动的强弱。

4.干涉现象是波动的特性

波动的特征：能量以振动的形式在物质中依次转移，物质本身不随波移动。

从波的能量传递的角度来讲，波动就是能量的一种传播方式，波动的干涉是这种传播方式中能量的叠加特性。

干涉现象的存在 $\Leftrightarrow$ 波动的存在

5.相干与不相干叠加

(1) 只有经过干涉装置才能观察到干涉现象。

能够干涉——**相干**，不能干涉——**不相干**。

(2) 干涉现象

有如下的两个相互独立的简谐振动，沿同一直线方向，频率相同，相位不同：

$$\begin{aligned} E_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ E_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (1-5)$$

叠加的结果由两式相加：

$$E = E_1 + E_2 = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1-6)$$

A 为合振动的振幅， φ 为合振动的初相位。

i.对于振幅 A ：

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (1-7)$$

由(1-7)式：相位差为任意角度时，合振动的强度不等于分振动之和；实际观察到的总是较长时间内的平均强度（指的是观察所用时间比如1s远大于一个周期）。时间间隔 τ 内光强如下：

$$\bar{I} = \bar{A}^2 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau A^2 dt = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

其中相位差 $\varphi_2 - \varphi_1$ 不变。 $2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ 称为**干涉项**。

合振动平均强度最大（干涉相长）条件：

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2j\pi, j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

合振动平均强度最小（干涉相消）条件：

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (2j + 1)\pi, j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$\varphi_2 - \varphi_1$ 在此间任意值，则平均强度为：

$$\bar{I} = 4A_1^2 \cos^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

若原振动初相位不断改变，概率均等的取0到 2π 建任意可能值，即 $\varphi_2 - \varphi_1 = f(t)$ ：

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos(\varphi_2 - \varphi_1) dt = 0$$

$$\bar{I} = \bar{A}^2 = A_1^2 + A_2^2$$

ii.对于初相位 φ ：

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (1-8)$$

(3) 同频率的电磁振动叠加的两种情况：

i. 相位差保持不变，合振动平均强度可以大于或小于分振动强度之和。通常来说，称频率相同、振动方向几乎相同（实际上不垂直即可）并在观察期内相位差保持不变的两个振动是相干的。

ii. 相位差无规则改变，合振动的平均强度等于分振动之和，无干涉现象，不相干。

(4) n 个振动：

相干，振幅在0和 $\sum_{i=1}^n A_i^2$ 之间

不相干，振幅就是 $\sum_{i=1}^n A_i^2$

1.2 单色波叠加形成的干涉图样

1. 相位差和光程差

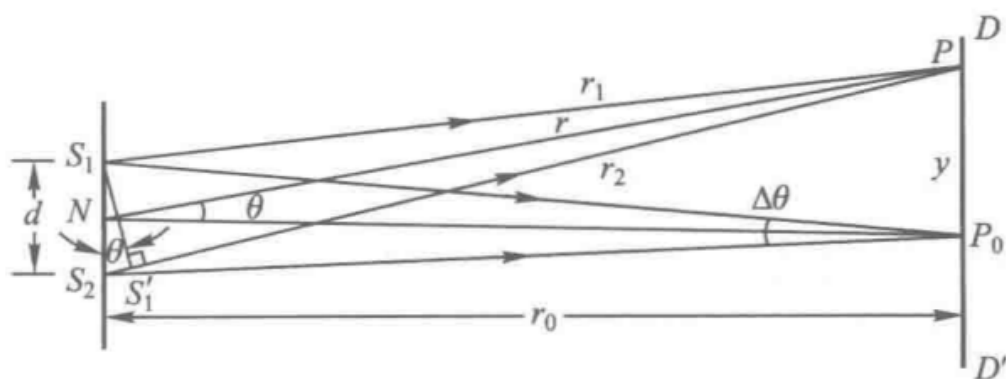


图 1-2 光程差的计算

对于 S_1 和 S_2 两处发出的两列单色简谐波，振源的振动为：

$$E_{01} = A_{01} \cos(\omega t + \varphi_{01})$$

$$E_{02} = A_{02} \cos(\omega t + \varphi_{02})$$

φ_{01} 和 φ_{02} 为初相位。

取P点，当两列波同时到达P点时，P点的振动为：

$$E_1 = A_1 \cos\left[\omega\left(t - \frac{r_1}{v_1}\right) + \varphi_{01}\right]$$

$$E_2 = A_2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{r_2}{v_2}\right) + \varphi_{02}\right]$$

则相位差为：

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= \omega\left(\frac{r_2}{v_2} - \frac{r_1}{v_1}\right) + (\varphi_{01} - \varphi_{02}) \\
&= \frac{2\pi}{\lambda}(n_2r_2 - n_1r_1) + (\varphi_{01} - \varphi_{02}) \\
&\quad (\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda})
\end{aligned} \tag{1-9}$$

λ 为波长, n 为折射率, c 为真空光速。

相位差决定于: 一, 初始振动相位差($\varphi_{01} - \varphi_{02}$); 二, S_1 和 S_2 到 P 点的路程及所经过的介质决定的光程差。

光程:

$$\Delta = nr \tag{1-10}$$

光程差:

$$\delta = n_2r_2 - n_1r_1 \tag{1-11}$$

相位差(1-9)式变为:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1) \tag{1-12}$$

2.干涉图样的形成

按照上面得出的结论, P 点的移动会导致光程差发生变化, 进而引发相位差的变化。同时, 光的干涉效果也是波在 P 点处的振动的叠加, 因此遵循前面讨论过的光的叠加的规律。最终规律总结如下:

振源的振动为:

$$\begin{aligned}
E_{01} &= A_{01} \cos(\omega t + \varphi_{01}) \\
E_{02} &= A_{02} \cos(\omega t + \varphi_{02})
\end{aligned}$$

相位差为:

$$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1)$$

一、对于叠加后为最大值 $(A_1 + A_2)^2$ 的:

相位差:

$$\Delta\varphi = 2\pi j \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{1-13}$$

即**光程差为半波长的偶数倍**。

$$r_2 - r_1 = 2j\frac{\lambda}{2} \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{1-14}$$

称为**干涉相长**, 显示为亮条纹。

二、对于叠加后为最小值 $(A_1 - A_2)^2$ 的:

相位差:

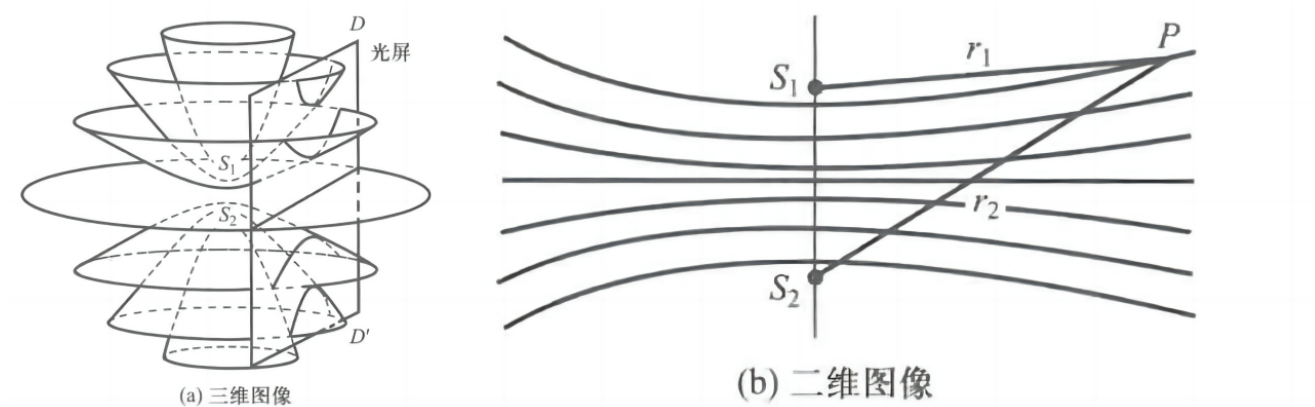
$$\Delta\varphi = (2j + 1)\pi \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1-13)$$

即光程差为半波长的奇数倍。

$$r_2 - r_1 = (2j + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1-14)$$

称为**干涉相消**，显示为暗条纹。

$j = m - 1$ 的条纹称为 **m 级条纹**。由波的叠加规律可知， $r_2 - r_1 = \langle const \rangle$ 的点振幅相同。则干涉图样的空间分布:



图样以双曲线/双叶旋转双曲线的形式分布，假设有一垂直于对称轴/对称面的光屏（即图中的竖直方向），则为一般见到的强弱相间的干涉图样。

为什么以双曲线分布呢？我们知道双曲线各点到两个焦点的距离差的绝对值相等，而光程差 $r_2 - r_1 = \langle const \rangle$ 刚好符合这一规律。

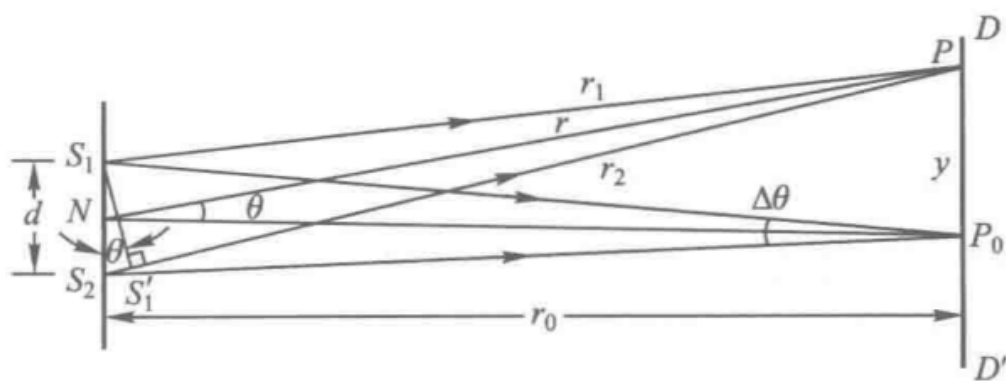


图 1-2 光程差的计算

如上图，如果要研究 P 与 P_0 点距离 y 与干涉条纹的关系，则有：

强度最大（最亮）：

$$d \sin \theta \approx d \frac{y}{r_0} = j\lambda$$

$$\text{or } y = j \frac{r_0}{d} \lambda \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$
(1-15)

强度最小（最暗）：

$$d \sin \theta \approx d \frac{y}{r_0} = (2j + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{or } y = (2j + 1) \frac{r_0}{d} \frac{\lambda}{2} \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$
(1-16)

可以看出，这里是与一个常量乘半波长的值相关的，**实际上就是与相位差相关。**

条纹单位间隔（最亮与最亮，最暗与最暗，同亮度之间）为：

$$\Delta y = y_{j+1} - y_j = \frac{r_0}{d} \lambda$$
(1-17)

角距离：

$$\Delta \theta \approx \frac{d}{r_0}$$
(1-18)

则条纹间距公式也可改写为：

$$\Delta y \approx \frac{\lambda}{\Delta \theta}, \text{ or } \Delta y \cdot \Delta \theta = \lambda$$
(1-19)

由于 $\Delta \theta$ 通常很小， $\Delta \theta \approx \sin \theta$ ，实际上可以把干涉条纹看作叠加波在垂直方向上的展开。这里的关系体现的就是波动的性质。

干涉图样特点总结：

- (1) 各级亮条纹的光强相等，相邻亮条纹和相邻暗条纹都是等间距的，且与干涉级 j 无关。
- (2) 当一定波长 λ 的单色光入射时，间距 Δy 的大小与 r_0 成正比，而与 d 成反比。
- (3) 当 r_0 、 d 一定时，间距的大小与光的波长 λ 成正比，**可用此方法测量光的波长**，公式：

$$\lambda = \frac{d \Delta y}{r_0}$$
(1-20)

(4) 用白光做光源时，中央亮条纹是白色，其余出现色散。 j 较大时，色散导致不同波长的条纹重叠而难以辨认。故实验一般用单色光。

- (5) 实质上体现了参与相干叠加的光波间相位差的空间分布，记录了相位差的信息。

这种记录相位差的特性，实际上为现代信息光学的编码提供了条件。

注意，如果空间各点的相位差会随时间变化，那么干涉条纹不是稳定的。

1.3 分波面双光束干涉

1.光源和机械波源的区别

区别主要在于**振动的连续性**。

通常的独立光源是不相干的。通常原子辐射发光，但是发光时间很短，只有 $10^{-8}s$ ，相位差在每一次新的辐射开始时发生改变，因此相位差是以极高的（人眼不能分辨的）频率不断改变的，导致光不相干且在人眼中成像为连续的一块。

而**机械波通常是以一种连续的方式产生的**，从而一般是相干的。

能否观察到干涉现象的限制条件：

- (1) 光源的相干性；
- (2) 接收器的时间响应频率。（帧率）

2.光的干涉实验

- (1) **杨氏双缝实验**：最早解释了干涉现象。

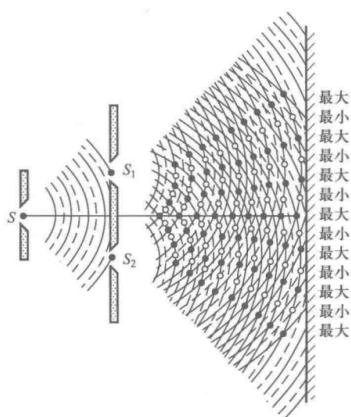


图 1-4 杨氏实验装置

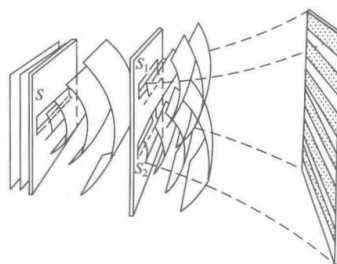


图 1-5 杨氏干涉图样

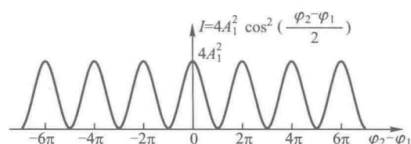


图 1-6 杨氏干涉的光强分布

实际上这个方法就是前面推导干涉图样的方法。其中 S 点是光源，通过狭缝 S_1 和 S_2 得到干涉光源。现代实验则常用激光来作为光源，直接照射双缝。

- (2) **菲涅耳双面镜实验**：解决杨氏装置中的小孔/狭缝的边缘效应。

菲涅耳采用双平面镜的方法来代替小孔。 M_1 和 M_2 是两个平面镜，错开一个很小的角度，使夹角略小于 180° 。这样，就相当于光源 S 被分别复制到在 M_1 和 M_2 中成像的位置。这里体现了为什么两个平面镜要成一个角度——因为要避免两个像重合，否则就无法发生干涉了。

那么当两个像建立起来的时候，实际上就形成了一个杨氏双缝干涉的形式，可以直接套用双缝干涉的结论，而双缝并不真实存在，所以又成功的避免了双缝的边缘效应。

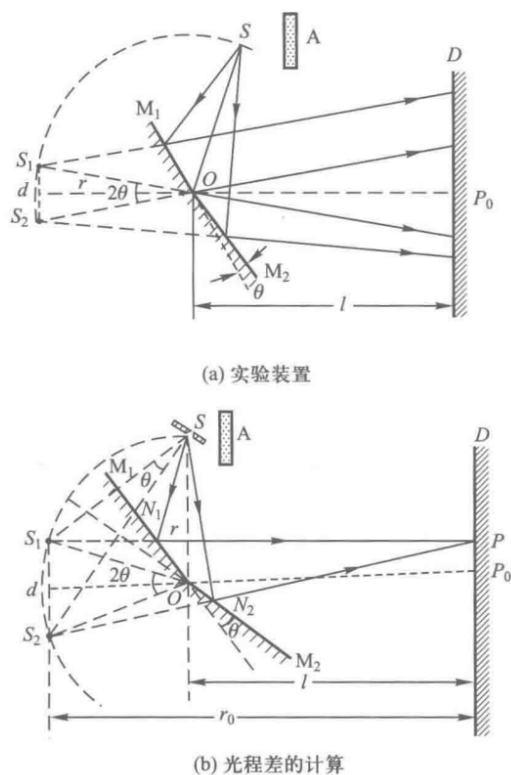


图 1-8 菲涅耳双面镜装置及光程差计算

不过，光程差的计算与双缝干涉是不同的，这里将公式列在下面：

条纹间距

$$\Delta y = \frac{r + l}{2r \sin \theta} \lambda \quad (1-21)$$

其中 θ 就是 M_2 相对于 M_1 转过的角度。

以激光器作为光源时，由于激光近似平行，相当于 S 位于无限远处，则简化为：

$$\Delta y = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} = \frac{\lambda}{2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \quad (1-22)$$

(3) **劳埃德镜实验**：是一个更简化的干涉装置。光源通过狭缝 S 形成线状光源，一部分直射到 P 点，另一部分通过平面镜 M 的反射到达 P 点，相当于从像 S' 处发出，从而同样形成干涉装置，此时 P_0 处在平面镜的延长线上。同时，由于光线是被反射，条纹只出现在镜的上半部分。

同时这个装置揭示了**光的半波损失**。当接近 P_0 位置时，光线掠射导致发生半波损失，刚好改变一半波长，相应的光程差改变一半的波长，从而导致亮暗条纹交换位置。一般来讲实验中光线大多是掠射的，故几乎所有条纹交换亮暗。

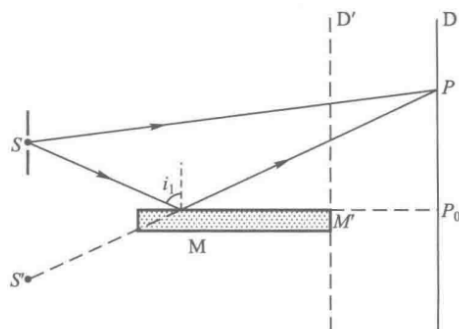


图 1-10 劳埃德镜的光程计算

光程差：

$$\delta = S'P - SP - \frac{\lambda}{2} = \frac{d}{r_0}y - \frac{\lambda}{2} \quad (1-23)$$

其实可以想到，如果考虑 P_0 位置，那么此处的下面一条光线是无限接近和镜面平行的，实际上根本到不了 P_0 点，也就是说这里本来就应该没有条纹的，考虑连续性的话刚好符合半波损失的情形。当然，这种暗条纹只是理想情况的猜想，跟真正的原因——半波损失没有任何关系。

(4) **维纳驻波实验**：利用干涉形成驻波，利用波腹和波节形成干涉条纹。

驻波：入射波和反射波相干叠加形成的不行进（“驻”）的波。振幅最大的是**波腹**，振幅最小的是**波节**，相邻波腹和波节的距离为**半个波长**。

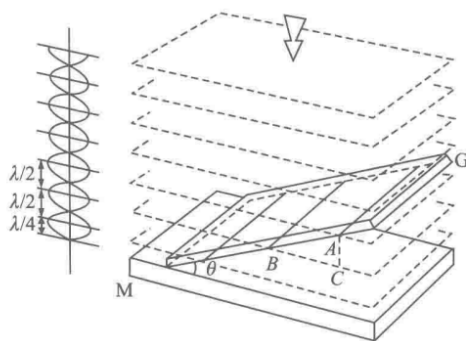


图 1-12 维纳实验

如上图所示， M 是一高反射率的镀银平板，上方光源垂直入射形成驻波，图中画出的平面表示驻波的波腹，用一涂有感光乳剂的玻璃板 G 与 M 成一个小角 θ ($\theta < 10'$)，则 G 接到波腹的位置出现亮条纹，波节处则为暗条纹。需要注意的是， P_0 位置显然位于接触点，但是接触点仍为暗条纹，因为垂直入射会发生**半波损失**。

1.4 实验中干涉条纹的性质

1.干涉条纹的可见度

可见度 (衬比度, 对比度) : 干涉条纹的强弱对比

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (1-24)$$

$V = 1$ ($I_{min} = 0$) 时, 暗条纹全黑, 反差最大; $V \approx 0$ ($I_{max} \approx I_{min}$), 条纹模糊不清甚至不可辨认。

光源振幅分别为 A_1, A_2 , 则用振幅表达的可见度:

$$V = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} = \frac{2(\frac{A_1}{A_2})}{1 + (\frac{A_1}{A_2})^2} \quad (1-25)$$

光强可写为:

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi = I_0(1 + V \cos \Delta\varphi) \quad (1-26)$$

2.光源的非 (准) 单色性对干涉条纹的影响

光源具有波长范围 $\Delta\lambda$ 时, 除零级外, 不同波长的条纹重叠会影响条纹的可见度下降。以杨氏干涉实验为例, 极大值的范围称为**明条纹宽度**:

$$\Delta y = j \frac{r_0}{d} \Delta\lambda \quad (1-27)$$

干涉级提高, 同一级干涉条纹的宽度增大, 可见度相应降低。当波长为 $\lambda + \Delta\lambda$ 的第 j 级与波长为 λ 的第 $j + 1$ 级条纹重合时, 条纹的可见度降为零。此时的干涉级:

$$j = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (1-28)$$

相干长度, 即产生干涉条件的最大光程差:

$$\delta_{max} = j(\lambda + \Delta\lambda) \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} (\lambda \gg \Delta\lambda) \quad (1-29)$$

由光源的单色性决定。

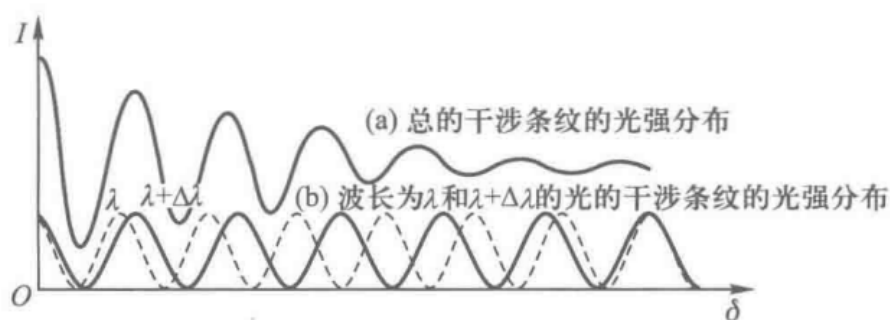


图 1-13 光源的非单色性对干涉条纹的影响

3.时间相干性

光源向外发射的是有限长的波列（列具有一定长度的光波），这种光波只有在有限的空间范围并且在一定的时间内才能看作是稳定的。**光的单色性和波列的长度相关。**

当光程差过大，导致超过了波列的长度时，就会出现同一波列在狭缝被分开（波列是以波面形式前进的），但在光屏上与另一波列相遇的情况。前面说过，这样的两个波列是没有固定的相位关系的，故无法发生干涉。得到干涉的一个必要条件：**两光波在相遇点的光程差小于波列的长度。**波列长度：

$$L = \delta_{max} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \quad (1-30)$$

波列长度 L 与谱线宽度 $\Delta\lambda$ 成反比，这代表光的单色性越好，谱线就越窄，波列就越长。因此，激光器的波列应当很长。

相干时间：衡量时间相干性好坏。相干时间越长，时间相干性越好。

$$\Delta t_0 = \frac{L}{c} \quad (1-31)$$

时间相干性是光场的纵向相干性。

4.光源的线度对干涉条纹的影响

在实际情况下，光源不会是一个理想的线光源，而是有一定的宽度的。这种光源可以理解为由一系列线光源组成，这些线光源相互重叠，从而形成重叠的干涉条纹。这些条纹的效果类似于以上的讨论：当光程差达到半个波长的时候，干涉条纹可见度为0。

设光源宽度为 d' ，双缝的距离为 d ，干涉条纹可见度为0的情况为：

$$\delta = \frac{dd'}{r'_0} = \frac{\lambda}{2} \quad (1-32)$$

$$d' = \frac{r'_0}{2d} \lambda \quad (1-33)$$

临界宽度：使光屏上所有干涉条纹均不可见的**光源宽度**。

$$d'_0 = 2d' = \frac{r'_0}{d} \lambda \quad (1-34)$$

总结：光源越宽，条纹的可见度越小，当达到临界宽度时所有条纹均不可见。

5.空间相干性

由式(1-34)得到的最大双缝距离：

$$d_{max} = \frac{r'_0}{d'_0} \lambda \quad (1-35)$$

当双缝的宽度超过这个值时，光屏上总没有干涉条纹。光屏上有条纹时，**光场具有空间相干性**。

空间相干性（横向相干性）：描述光场中在光的传播路径上空间横向两点在他一时刻光振动的关联程度。

激光的空间相干性好。

实际干涉场中空间相干性和时间相干性的问题是并存的。

这里可以看出，在光学的应用中，激光是十分优质的光源，具有很高的地位。在现代基于干涉实现的光学技术中，相较于其它种类的光源，激光总是有更加优越的效果。

1.6 菲涅耳公式 半波损失

1.菲涅耳公式

此处要谈到电动力学，则需要先谈光的电动力学解释。电动力学对于光的解释是，光波（电磁波）是垂直的电场和磁场交替产生的。那么就可以将光分为平行矢量和垂直矢量。特别是光的横向矢量是在旋转的，每次旋转 90° ，旋转可以由相位 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 描述，这里的实轴和虚轴上就分别有振动 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ ，为平行和垂直分量。这种分量也是电场和磁场交替的。

将入射波、反射波、折射波的电矢量分为两个相互垂直的成分，一个平行于入射面（下标 p ），另一个垂直于入射面（下标 s ），以 i_1 、 i_1' 和 i_2 表示入射角、反射角、折射角，振幅用对应的 A_{ki} ， A'_{k1} （ $k = p, s, i = 1, 2$ ）表示。

由几何方法得到**菲涅耳公式**如下：

（一）反射波与入射波分量之比

$$\frac{A'_{s1}}{A_{s1}} = -\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)} \quad (1-36)$$

$$\frac{A'_{p1}}{A_{p1}} = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} \quad (1-37)$$

（二）折射波与入射波分量之比

$$\frac{A_{s2}}{A_{s1}} = -\frac{2 \sin i_2 \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)} \quad (1-38)$$

$$\frac{A_{p2}}{A_{p1}} = \frac{2 \sin i_2 \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2) \cos(i_1 - i_2)} \quad (1-39)$$

其中各波是按分量数值对比的，而不是直接在统一的一个方向上进行对比。

这里使用了标量近似的处理：对于一般的非偏振的入射波，每一方向都有振动，我们所取的是有参考的两个方向的平均值。平均能量为：

$$\begin{cases} \bar{I}_{s1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^2 \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} A^2 \\ \bar{I}_{p1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^2 \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} A^2 \end{cases} \quad (1-40)$$

上式两个值相等，所以 $\sqrt{\bar{A}_{p1}^2} = \sqrt{\bar{A}_{s1}^2}$ 。这对菲涅耳公式所揭示的规律的解释是：入射光在入射点突然改变方向。

2.半波损失的解释

(1) 掠射的情形

对于入射光由光疏介质掠射入光密介质的情况，有： $i_1 \approx 90^\circ$ ， $i_1 + i_2 > 90^\circ$ 。再由 $n_2 > n_1$ ， $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ ，可知 $i_1 > i_2$ 。由于正弦函数的对称性和余弦函数的反对称性，代入(1-36)式，得 $A'_{s1} < 0$ ，再代入(1-37)式，得 $A'_{p1} < 0$ ，又：

$$\left| \frac{A'_{p1}}{A_{p1}} \right| = \left| \frac{A'_{s1}}{A_{s1}} \right| = 1$$

这里有一个大前提是设定入射光的 s 、 p 分量的振幅方向为正方向。掠射时光波方向几乎不变，因此可以知道负号代表与入射光振幅方向相反，即发生了振动反向，与原振动方向差了一个相位 π ，即**发生半波损失**。

(2) 直射的情形

直射情形的推导也类似： $i_1 \approx 0^\circ$ ， $i_1 + i_2 < 90^\circ$ 。再由 $n_2 > n_1$ ， $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ ，可知 $i_1 > i_2$ 。代入(1-36)式，得 $A'_{s1} < 0$ ；代入(1-37)式，得 $A'_{p1} > 0$ ，而由于光波振动正方向也做了一个对称，实际振动还是反向的。同时振幅比也维持不变。这样的反向也提供了一个相位差 π ，故发生反向。

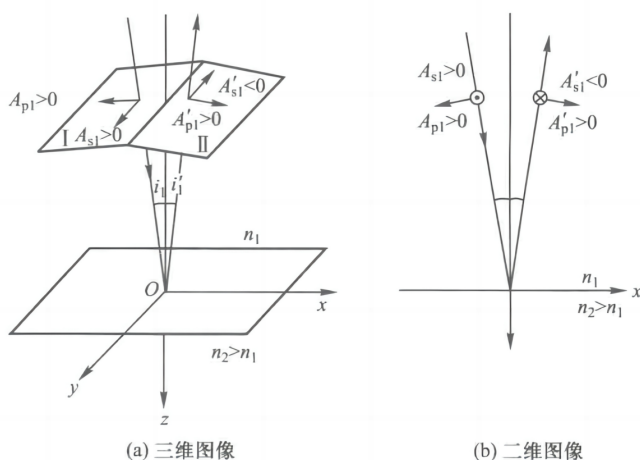


图 1-18 半波损失 ($i_1 \approx 0$)

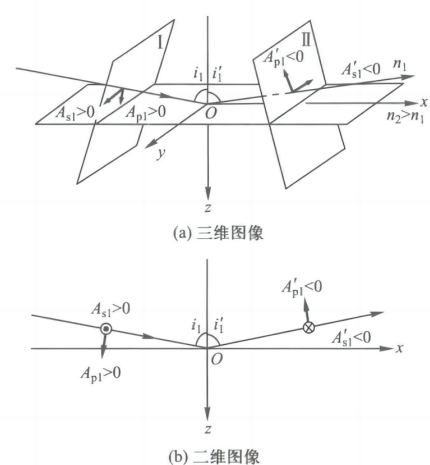
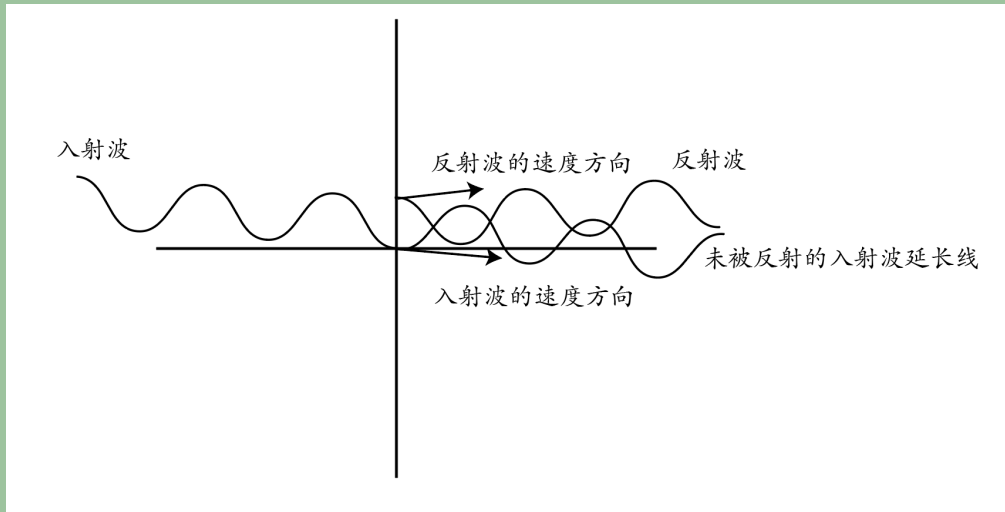


图 1-17 半波损失 ($i_1 \approx \pi/2$)

总结：半波损失发生当且仅当反射发生时 s 和 p 方向的振动都等大反向。以上所有考虑的是电矢量的半波损失，而磁矢量的情况与之相同。

实际上上面的解释还是有点太抽象了，实际上我们可以这样理解：本来是要光要沿直线传播，但是现在被反射了，反射了什么东西呢？当然是波上面的点沿波形运动的速度（波包的运动），就像下图一样，反射波的运动方向相对于入射波的运动方向做了一个镜像，导致反射波成了延长线的镜像，刚好差了一个 π 的相位（ $-\sin(\theta) = \sin(\theta + \pi)$ ），就形成了半波损失。



1.6 分振幅薄膜干涉——等倾干涉

1.单色点光源

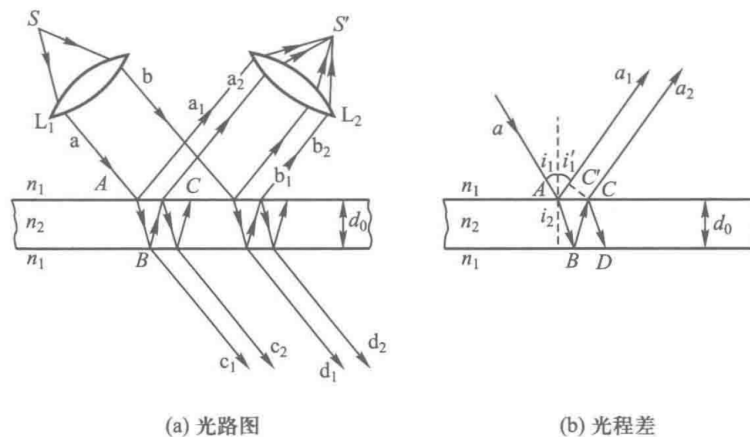


图 1-19 光程差的计算

如图，一个单色点光源 S ，放在凸透镜的焦点处，利用凸透镜整理成一束平行光，入射到透光薄膜上，在上表面和下表面分别发生一次反射，下表面的反射光到了上表面又发生一次折射（折射光下标为1），与上表面第一次反射的反射光（下标为1）发生干涉。我们知道，判断干涉的标准是光程差，同时入射光的反射还有半波损失，所以计算**光程差**为：

$$\delta = n_2(AB + BC) - n_1AC' - \frac{\lambda}{2}(CC' \perp a_1)$$

膜的厚度 d_0 ，有 $AB = BC = d_0 \cos i_2$ ，由几何关系折算，

$$n_1AC' = 2n_2d_0(1 - \cos i_2) / \cos i_2, \quad n_2 \cos i_2 = \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1}:$$

$$\delta = 2d_0 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} - \frac{\lambda}{2}$$

将干涉的平行光汇聚到 S' 点，亮暗将由以下的公式决定：

$$\delta = 2d_0 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} = 2d_0 n_2 \cos i_2 = \begin{cases} (2j+1) \frac{\lambda}{2}, & \text{相长} \\ 2j \frac{\lambda}{2}, & \text{相消} \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (1-40)$$

以上就产生了这种干涉的应用。我们可以看到，上面影响光程差的变量中唯一一个可以控制不变的是厚度 d_0 。那么假设我们把厚度卡在某一个角度上相消的程度，即：

$$d_0 = \frac{(2j+1)\lambda}{4n_2 \cos i_2}$$

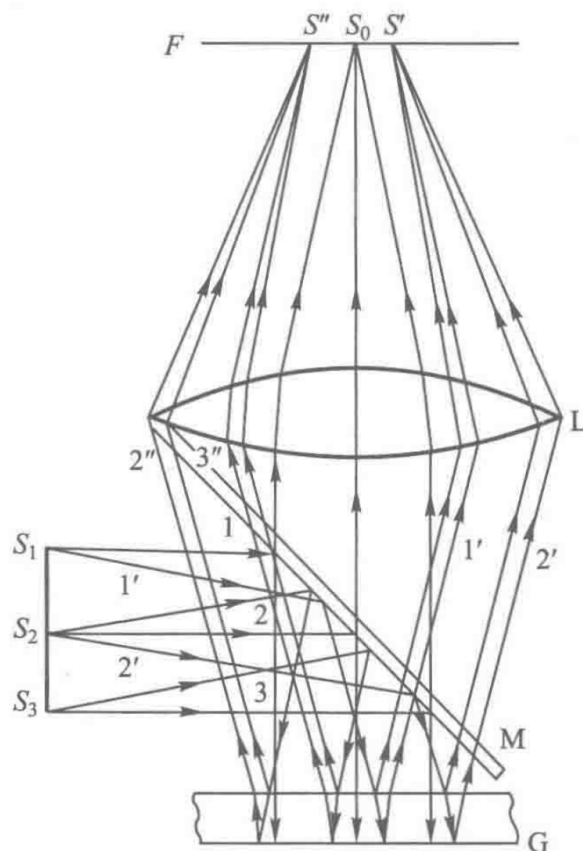
那么我们就可以发现，这时候刚好出现了无论在 i_2 角度上的相长，所有的光能都砸在反射上，就没有透过去的光了，这就是**增反膜**，常见于汽车玻璃膜的外表面。如果代入相消的，则相应可以得到**增透膜**，可以用于玻璃等。当然，这种应用应该作适应角度的球面处理。

反射率：

$$\rho = \left(\frac{A'}{A}\right) = \rho_s \approx \rho_p = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2 \quad (1-41)$$

2. 扩展光源的等倾干涉

扩展光源的情形和前面提到过的非线光源的情况同理。**扩展光源不同发光点对薄膜的倾角是不同的**，最大值和最小值由(1-40)决定，因此**它们所形成的干涉条纹会连成一片**，所以采用如下图的装置解决此问题。考察分别由光源 S_1 和 S_2 发出的两条光线 $1'$ 和 $2'$ 。和关系可以知道，如果扩展光源和薄膜成一个锐角，那么就会出现角度不相同的情况。但是在图中光源和薄膜成垂直角度，并且由一个平面镜进行反射，就可以将原本不同角度的光线整理成平行的光线。这些平行的光线在经过凸透镜的汇聚，就可以有相同的光程差，并且被汇聚到同一个点，例如 $1'$ 和 $2'$ 被汇聚到 S' 点。这说明只要是入射角相同的光就形成同一条纹，如 S_0 ， S' 和 S'' 。这些倾斜度不同的光束经薄膜反射所形成的干涉图样是一些明暗相间的同心圆环，称为**等倾干涉**。



等倾干涉条纹明暗的条件由式(1-40)决定， d_0 一定时干涉级数 j 越高，相当于入射角越小。不使用透镜时干涉条纹应在无限远处，即**等倾干涉条纹定域于无限远处**。等倾干涉有如下特点：

(1) 光源的大小对等倾干涉条纹的可见度并无影响。扩展光源产生的等倾条纹的强度相较于点光源会大大加强，使干涉图样更加明亮，因此在实验室中观察时常将激光光源转化为扩展光源。

(2) 等倾条纹的位置与形成条纹的光束入射角有关，而与光源的位置无关。

i_2, i'_2 两个不同的入射角与薄膜厚度的关系为：

$$i_2 - i'_2 = \frac{\lambda}{n_2 d_0}$$

薄膜的厚度越大，入射角的差值越小，即相邻的两条纹之间的距离越小，因此条纹越密，越不易辨认。

同一点发出，通过均匀介质并在透镜后同时汇聚于一点的任何光线，光程都是相同的。因此以上通过透镜的1'和2'两条光线是分别没有光程差的。

1.7 分振幅薄膜干涉——等厚干涉

1.单色点光源所引起的等厚干涉条纹

等厚干涉发生在尖劈形介质薄膜的情况中。相比于等倾干涉，等厚干涉主要改变的是薄膜的厚度 d_0 。

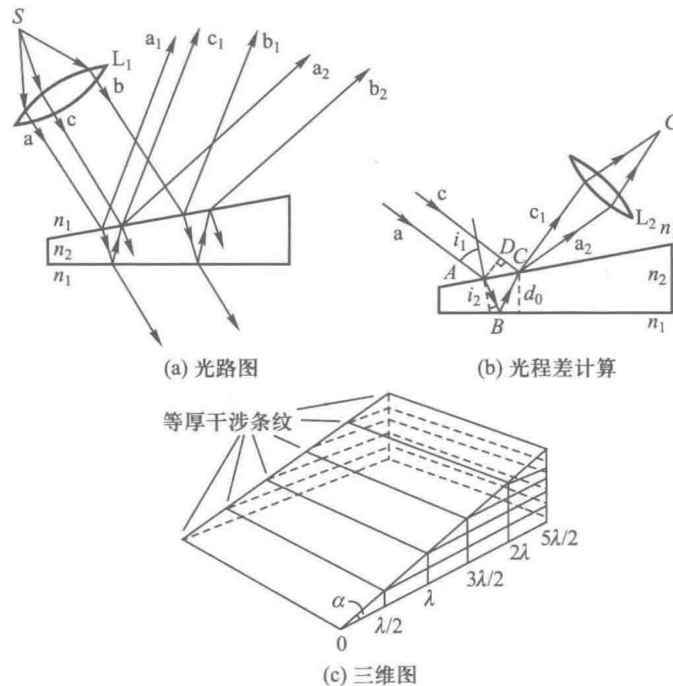


图 1-21 等厚干涉

劈尖形薄膜上下表面不平行，所以两次折射不是对称的。如图(b)中所示，第二次折射的入射光相当于被下表面顺时针旋转了一个角度，所以出射的平行光 a_2b_2 相对于直接反射的平行光 a_1b_1 也顺时针旋转了一个角度。这就导致直接反射的光和出射的光并不平行。这两束不平行的光能够汇聚于图中的 C' 点，但是由于薄膜的厚度发生变化，二者是有光程差的。光程差的值为：

$$\delta = n_2(AB + BC) - n_1CD - \frac{\lambda}{2} \quad (1-42)$$

如果薄膜的厚度和和表面的夹角都很小，那么光程差仍可认为近似的符合 (1-40) 式。

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0 = (j + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1}} \text{ 相长} \\ d_0 = j \frac{\lambda}{2\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1}} \text{ 相消} \end{array} \right. \quad (1-43)$$

如果采用正入射方式，即入射光和反射光处处都与薄膜表面垂直：

$$\delta = 2n_2d_0 - \frac{\lambda}{2}$$

薄膜表面不同的入射点的入射角 i_1 是相同的，但是 d_0 不同，故薄膜表面各点经过透镜 L_2 所成的像明暗也不同，形成**等厚干涉**。零级条纹在尖劈的棱（ $d_0 = 0$ ）处。薄膜很薄，光在薄膜面上的入射角不大时，平行光照射可在全空间均出现清晰的条纹。

2. 薄层色

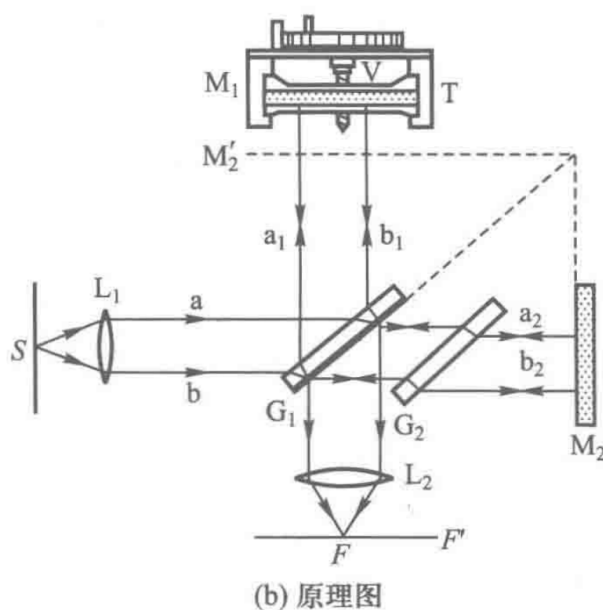
采用复色光，如太阳光时，由于每一波长的光都发生干涉，此时干涉条纹是彩色的。这种彩色是不同颜色的干涉条纹重叠产生的，因此仍然是混合色，不是单色，称为**薄层色**。

1.8 迈克耳孙干涉仪

迈克耳孙干涉仪的测量结果可以精确到与波长同数量级，所以应用范围很广阔。迈克耳孙干涉仪最先以光的波长为单位测定了国际标准米尺的长度；还可用于原子物理，计量科学，质量检测等领域；也是验证光速不变原理的实验工具。

迈克耳孙干涉仪的干涉是一种等倾干涉。 G_1 由镀银的半透明玻璃板制成，称为分光板。 G_2 由完全透明的玻璃板制成，称为补偿板（补偿光程）。分光板的银膜非常薄，可以让部分光透过。

光由光源 S 射出，通过凸透镜 L_1 变为平行光照射到分光板 G_1 上。 G_1 将光束分为强度相等的反射光和折射光。其中**反射光**垂直的入射到平面镜 M_1 上，由 M_1 反射回 G_1 并穿过 G_1 ，照射到凸透镜 L_2 上，汇聚于 L_2 的焦点 F 。**折射光**穿过 G_2 垂直照射到 M_2 上，再由 M_2 反射，穿过 G_2 照到 G_1 上，并通过 L_2 汇聚于焦点 F 。**这样 M_2 就通过 G_1 在图中的 M'_2 处形成了一个虚像。**在光学中像可以产生与实体相同的效果，因此 M_1 和 M'_2 中间就夹出了一个空气薄膜，从而形成**等倾干涉**。同时由于反射光三次穿过分光板，而折射光只穿过了一次，因此要设置一个 G_2 让折射光与反射光有相同的光程，**否则就会导致这两束光先形成一个干涉，而不是形成薄膜干涉**，因此 G_2 补偿了光程，所以称为补偿板。



干涉条件

$$2d_0 \cos i_2 = \begin{cases} 2j \frac{\lambda}{2} & \text{相长} \\ (2j+1) \frac{\lambda}{2} & \text{相消} \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (1-44)$$

其中 d_0 是薄膜的厚度。

1.9 法布里-珀罗干涉仪 多光束干涉

1.法布里-珀罗干涉仪

对迈克尔孙干涉仪来说，干涉条纹的光强介于最大值 $4A_1^2 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$ 和最小值0之间，如果相位差 $\frac{\Delta\varphi}{2}$ 连续改变，则光强变化缓慢，所有的条纹的最亮点和最暗点之间的亮度都是连续改变的，条纹的可见度较低。对实际应用来说，干涉图样最好是**十分狭窄，边缘清晰并且十分明亮的条纹**，并且**亮条纹应该能被比较宽阔且相当暗的区域隔开**，实际观感是**亮条纹是比较狭窄的亮线**。**多光束干涉系统**是一个解决方案，可以在对应于某一指定的 $\frac{\Delta\varphi}{2}$ 处才出现十分锐利的最大值，其他各处都是最小值。

法布里-珀罗干涉仪可以实现这种干涉条纹。中间两个板 G 和 G' 相向的表面上镀有平面度与标准样板之间相差不超过 $\frac{1}{20} \sim \frac{1}{50}$ 波长的薄银膜，光线可以在银膜之间反射。光线从面光源 S 射出，经过透镜 L_1 整理为平行光束，入射到干涉仪之间，反射后透射出的平行光束在第二个透镜 L_2 的焦平面上可以形成同心圆形的等倾干涉条纹。这种条纹就符合上面的要求。

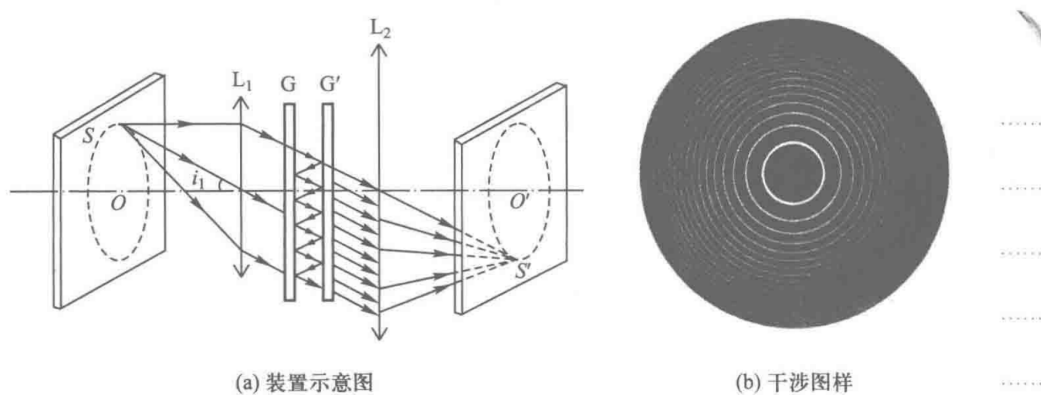


图 1-24 法布里-珀罗标准具

2.多光束干涉

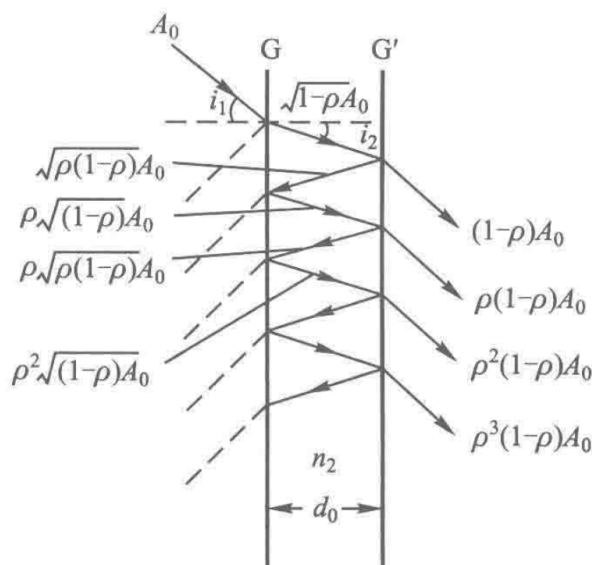


图 1-25 光束的多次反射和透射

考虑如图的反射和透射摄影面的反射率为 ρ ，则每次反射用系数 $\sqrt{\rho}$ 乘振幅，每次透射用系数 $\sqrt{1-\rho}$ 乘振幅，经过多次反射和透射，从后表面 G' 点透射出来的光束都是平行的，且振幅成等比数列： $(1-\rho)A_0, \rho(1-\rho)A_0, \rho^2(1-\rho)A_0, \rho^3(1-\rho)A_0, \dots$ 。这些光束用一个透镜整理到同一点，从而形成干涉，相邻两光束光程差和相位差为：

$$\delta = 2n_2d_0 \cos i_2, \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{4\pi}{\lambda}n_2d_0 \cos i_2 \quad (1-45)$$

可见振幅是公比为 ρ 的等比级数，相位是以公差为 φ 的等差级数。多束透射光形成的干涉条纹的合振幅的平方：

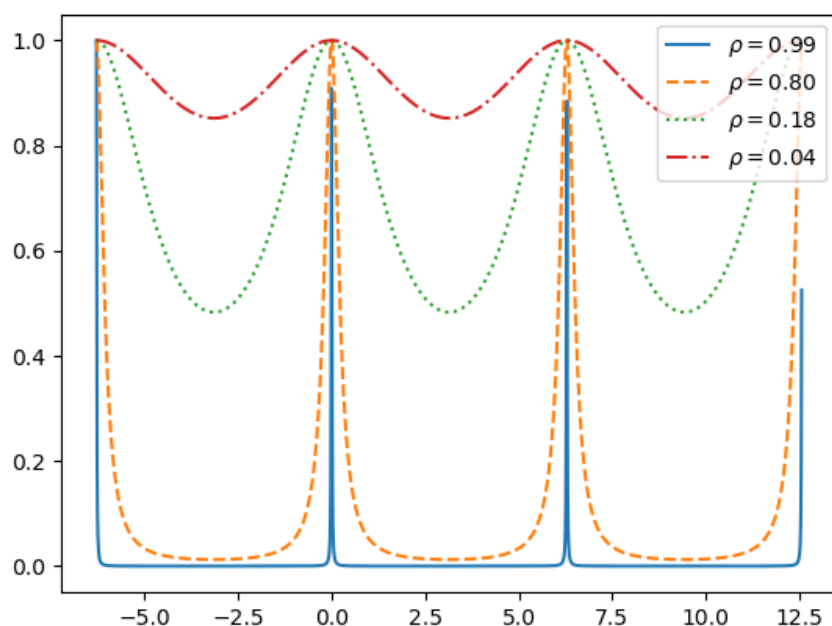
$$A^2 = A_0^2 \cdot Ai(\varphi) = \frac{A_0^2}{1 + \frac{4\rho}{(1-\rho)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (1-46)$$

其中 $Ai(\varphi)$ 为艾里函数，**精细度** $F = \frac{4\rho}{(1-\rho)^2}$ ，反映干涉条纹的细锐程度。

振幅：

$$A = \begin{cases} A_0, & \varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \\ \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)A_0, & \varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots \end{cases}$$

如下图可以看到，艾里函数会出现大量尖锐的尖峰，图中尖峰的位置分别为 $-2\pi, 0, 2\pi, 4\pi$ ，即对应亮条纹出现的位置。当反射率 ρ 越接近1时，尖峰越尖锐，所以实验中应该选择反射率较大的材料。



相比迈克耳孙干涉仪，法布里-珀罗干涉仪的干涉条纹清晰明锐，镀银面的反射率更大，制作更简单。其两相邻透射光的光程差表达式和迈克尔孙干涉仪完全相同，因此条纹的间距、径向分布很相似。如果使用复色面光源，法布里-珀罗干涉仪的干涉条纹就会展开成彩色光谱。

第2章 光的衍射

2.1 惠更斯-菲涅耳原理

1.光的衍射现象

光的衍射：光绕过障碍物偏离直线传播而进入几何阴影，并在屏幕上出现光强分布不均匀的现象。

能够发生衍射是波的特点之一。

只有在障碍物线度和波的波长可以比拟时，衍射现象才明显的表现。（可以比拟：数量级相差不大）

2.惠更斯原理

波面：在波传播时，同相位的各点的位置连成的轨迹形成的等相面。也就是同时发出的波形成的一个球面（一个球形的包络面）。

惠更斯原理：任何时刻波面上的每一点都可作为次波的波源，各自发出球面次波；在以后的任何时刻，所有这些次波波面的包络面形成整个波在该时刻的新波面。

原始的惠更斯原理是一个很粗糙的原理，并不能完全解释衍射现象。

3.惠更斯-菲涅耳原理

菲涅耳假设：

在波面 S 上取面积元 dS ，看作新的波源发出一个次波，波面前方空间某一点 P 的振动由所有的面积元发出次波在该处叠加后得到。由此可以做出四个假设：

(1) 由波面的等相位性认为， dS 面上各点所发出的所有次波都有相同的初相位，设为零点 $\varphi_0 = 0$ ；

(2) 次波在 P 点处引起振动的振幅与距离 r 成反比，即次波是球面波（振幅分布跟着强度开方，类似库仑势）；

(3) 面积元 dS 发出的次波在 P 处的振幅正比于 dS 的面积，且与倾角 θ 有关。 θ 为 dS 的法线 $\hat{r}$ 之间的夹角；

(4) 光程 $\Delta = nr$ ， P 点处相位 $\varphi = 2\pi\Delta/\lambda$

P 点处合振动：

$$dE \propto \frac{dSK(\theta)}{r} \cos(kr - \omega t) \quad (2-1)$$

加一个分布函数 $A(Q)$ ，作积分，得到**菲涅耳衍射积分**：

$$E \propto \int \frac{K(\theta)A(Q)}{r} e^{i(kr - \omega t)} dS \quad (2-2)$$

如果学过量子力学，应该就已经看出来了：这个很明显是一个球面波的波函数截面的积分（ $\hbar$ 和拆开的 E 和 k 消掉了），与量子力学情形只差一个系数。

衍射的类型：

(1) **菲涅耳衍射（近场衍射）**：障碍物到光源和考察点的距离至少有一个是有限的；

(2) **夫琅禾费衍射（远场衍射）**：障碍物到光源和考察点的距离都可以认为是无限远的。

2.2 菲涅耳半波带 菲涅耳衍射

1.菲涅耳半波带

菲涅耳半波带是惠更斯-菲涅耳原理的应用。

如图， B_0 是 P 点对波面的极点，令 $PB_0 = r_0$ ，则波面分为许多的环形带，每两个相邻带相应边缘到 P 点的距离相差半波长，从而由任何相邻两带的对应部分所发出的次波到达 P 点时的光程差为 $\frac{\lambda}{2}$ ，即相位差为 π 。这些带称为**菲涅耳半波带**（半波带）。

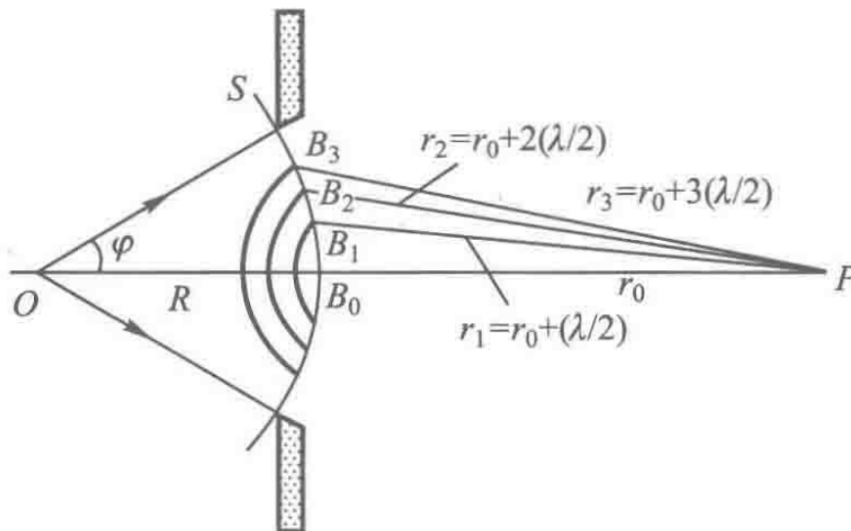


图 2-3 菲涅耳半波带

P 点处的合振幅为：

$$A_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + \cdots + (-1)^{k+1} a_k \quad (2-3)$$

此处主要是因为相位差 π ，那么由于在正弦运动中要符合 $\sin(\varphi + \pi) = -\sin \varphi$ ，所以相邻的两个振幅一定相反，再将第一个振幅 a_1 的方向设为正方向，得到的就是上面这个式子。

由衍射积分得：

$$a_k \propto K(\theta_k) \frac{\Delta S_k}{r_k} \quad (2-4)$$

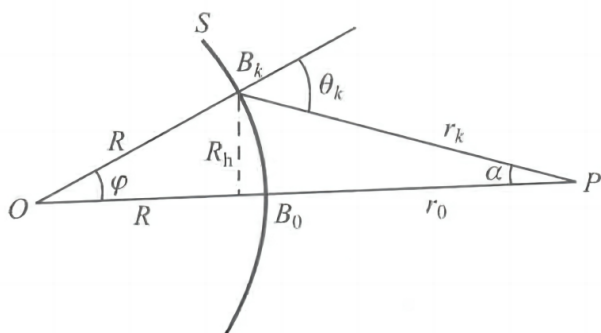


图 2-4 半波带面积

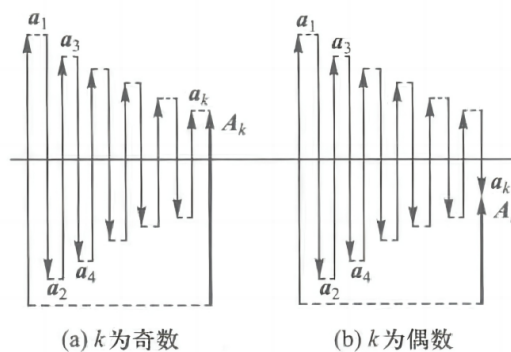


图 2-5 半波带法中的振幅矢量图

如图，由几何关系：

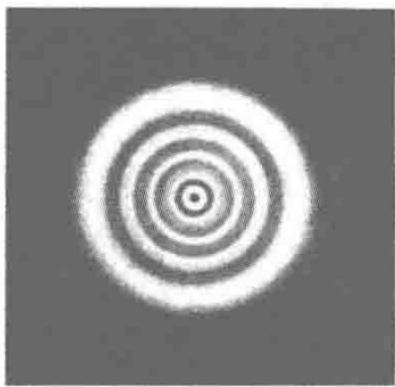
$$\frac{\Delta S_k}{r_k} = \frac{\pi R \lambda}{R + r_0} \quad (2-5)$$

显然上式与 k 无关，对每个半波带都是相同的。相邻的半波带 θ_k 的变化很小，因而 $K(\theta_k)$ 和 a_k 随 k 的增加而缓慢的减小，相位也逐个相差 π 。振幅矢量的序列如图(2-5)，由数列知识，合振幅：

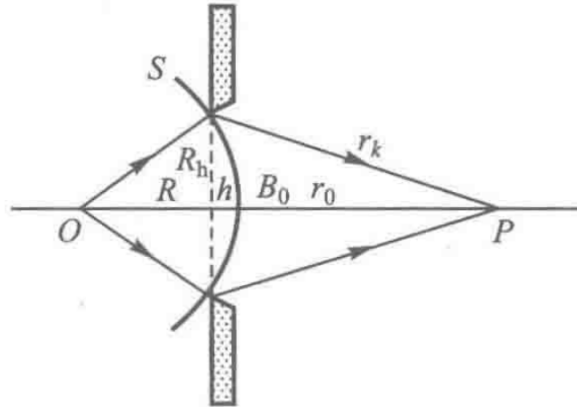
$$A_k = \frac{1}{2}[a_1 + (-1)^{k+1}a_k] = \frac{1}{2}(a_1 \pm a_k) \quad (2-6)$$

k 奇时取正, k 偶时取负。上式说明应用惠更斯-菲涅尔原理来计算观察点的振幅, 只要将第一个带和最末一个带所发出的自波的振幅相加或相减即可。

2.圆孔菲涅耳衍射



(a) 衍射图样



(b) 波带半径及面积的计算

图 2-6 圆孔的菲涅耳衍射

圆孔菲涅耳衍射的衍射图样如上: R_h 是圆孔的半径, 第 k 级半波带对应圆孔半径 $R_{hk} = R_h$, k 与 R_{hk} 、光的波长 λ 以及圆孔位置(r_0)都有关。计算可得:

$$R_h^2 = R_{hk}^2 = k \frac{r_0 R}{R + r_0} \lambda, \quad k = \frac{R_h^2 (R + r_0)}{\lambda r_0 R} = \frac{R_h^2}{\lambda} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R} \right) \quad (2-7)$$

几类特殊情形:

(1) 若采用平行光照射, 则相当于 $R \rightarrow \infty$, 则 $R_{hk} = \sqrt{k\lambda r_0}$, 当波长及圆孔的位置和大小都给定时, k 取决于观察点 P 的位置。 k 奇, 合振幅较大; k 偶, 合振幅较小; 如果带数不是整数, 那么合振幅介入上述最大值和最小值之间。此时 a_k 到达 P 点时为无限小, 则合振幅 $A_\infty = \frac{a_1}{2}$ 。没有遮蔽的整个波面对 P 点的作用等于第一个波带在该点的作用的一半, 此时光能的传播几乎可以看作是沿直线 OP 进行的, 屏沿着对称轴线移动时, 不发生某些点较强而某些点较弱的现象。

(2) 圆孔半径仅使第一个半波带露出, 则: $A_1 = a_1$, 所以光在通过圆孔以后到达任意一点时的光强, 不能单独由光源到该点的距离来决定, 还取决于圆孔的位置及大小。

3.圆屏的菲涅耳衍射

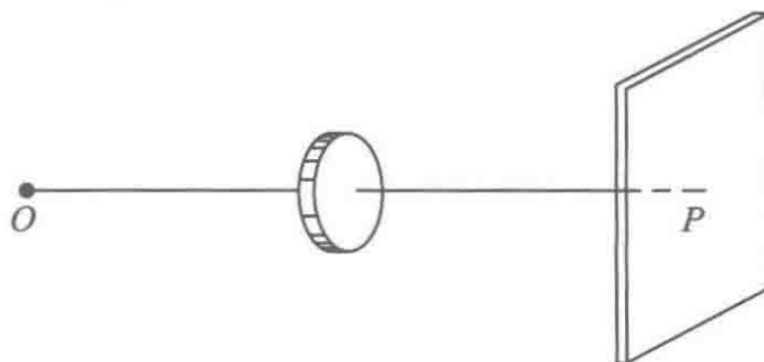


图 2-7 圆屏的菲涅耳衍射

设圆屏遮蔽了开始的 k 个带，从第 $k+1$ 个带开始，所有的带发出的次波都能到达 P 点，合振幅为：

$$A = \frac{a_{k+1}}{2}$$

则圆屏几何影子的中心永远有光到达，不过圆屏的面积越小，被遮蔽的带的数目就越少，因而 a_{k+1} 越大，到达 P 点的光越强。此时光强由露出的带的数目决定。

4.波带片

波带片：对于所考察的点只让奇数半波或偶数半波带透过的屏。由于各半波带上相应各点到考察点的光程差为波长的整数倍（相位差是 2π 的整数倍），因而互相加强。合振幅为：

$$A_k = \sum_k a_{2k+1} \text{ 或 } A_k = \sum_k a_{2k}$$

波带片的制作：先在绘图纸上画出半径正比于序数 k 的平方根（ $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \dots$ ）的一组同心圆，把相间的圆环涂黑，然后用照相机拍摄出底片，这个底片就是波带片。实践上可以采用光刻腐蚀工艺。

波带片的焦距：

$$f' = r_0 = \frac{R_{hk}^2}{k\lambda} \quad (2-8)$$

物像公式：

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r_0} = \frac{1}{f'} \quad (2-9)$$

5.直线传播和衍射的联系

以上仅考虑到光束中波面上的一点，如果考虑到每一光束中波面上所有各点发出的次波的叠加，情况就会发生一些变化。当波面完全不遮蔽时，所有次波在任何观察点叠加的结果就形成光的直线传播；如果波面部分遮蔽，缺少了部分次波的参加，便发生了衍射现象。

衍射现象是光的波动特性最基本的表现，光沿直线传播不过是衍射现象的极限表现而已。

考虑菲涅耳衍射的情况，假设 P 点的位置在影子区域以内，则进入影子区域越深，被遮住的带越多，露出的带越少，合振幅矢量也就越小，相应的光强也就不变的变暗。到了几何影子的边缘，这个光强实际上已经接近零，再深入影子，同样光强也为零。这便产生了我们平时所认知的影子。因此光的直线传播仅是光波衍射的一种，近似在适当条件下可以允许不考虑衍射现象。

6.菲涅耳直边衍射

当平行光垂直照射到具有直线边缘的不透明障碍物时，在影子边缘实际上也有复杂的衍射图样。

现在不再采用相位差为 π 的半波带，而是把半波带改为由无数个无穷小的面源分隔的次波面，那么波面在平面障碍物的平面上的投影就如下图。每一级的光强矢量如图所示，合振动的振幅矢量 $\vec{A}$ 为： $\vec{A} = \sum_{k=1}^n \vec{a}'_k + \sum_{k=1}^n \vec{a}_k$ 。此时左边仅露出三个带，如果整个波面完全露出，则矢量图的折线变成光滑的双螺线，称为**考纽螺线**。

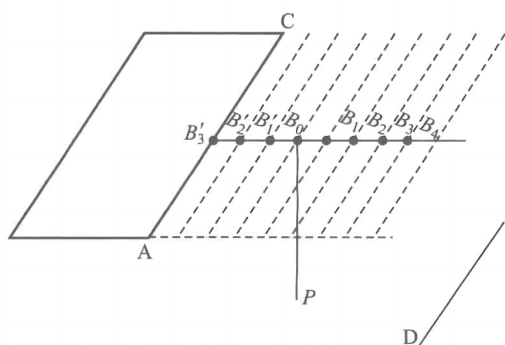


图 2-11 半平面障碍物的衍射

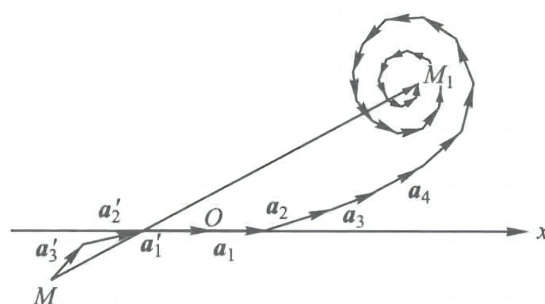


图 2-12 直边衍射的光强计算

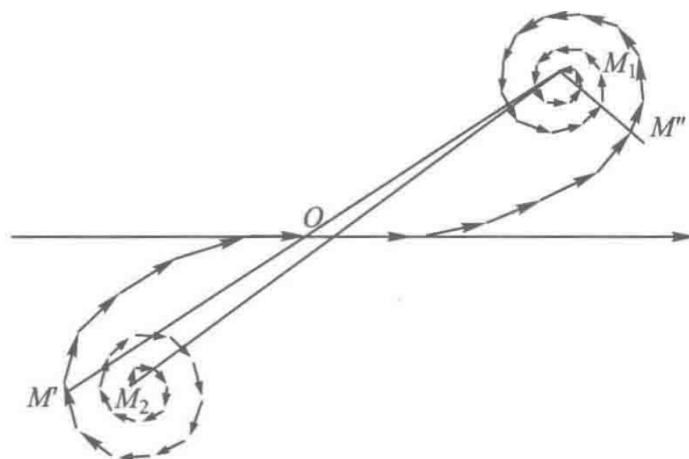


图 2-13 考纽螺线

有时候我们可以在几何影子的边缘看到一条一条的条纹，这就是直边衍射。

2.3 夫琅禾费单缝衍射

1.实验装置 衍射图样

夫琅禾费衍射是光源在无限远处的衍射，实际上就是用一个透镜将光整理成平行光，然后在第二个透镜的焦平面上观察衍射图样。在实验中光束经常要通过透镜，因而会经常遇到这种衍射现象，而由于透镜的汇聚，衍射图样的光强将大大增加。

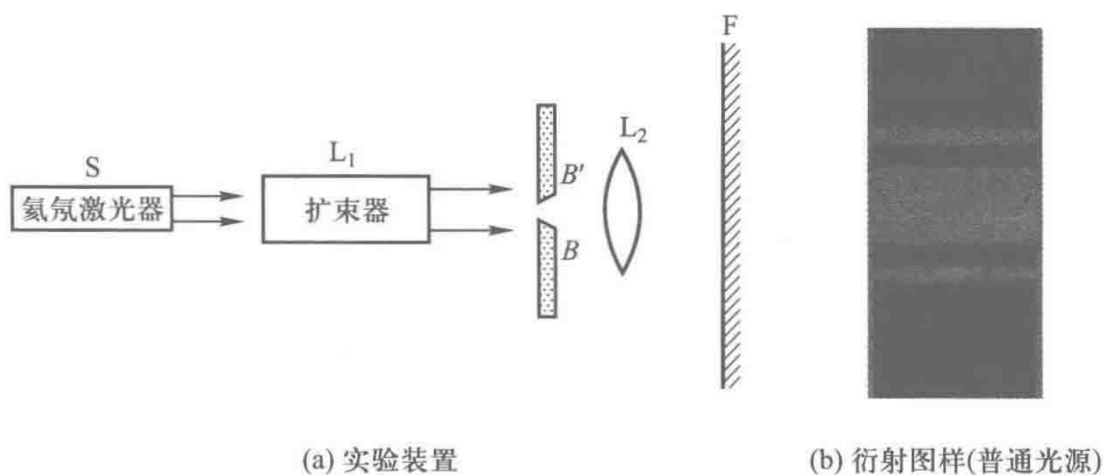


图 2-15 夫琅禾费单缝衍射

2.强度的计算

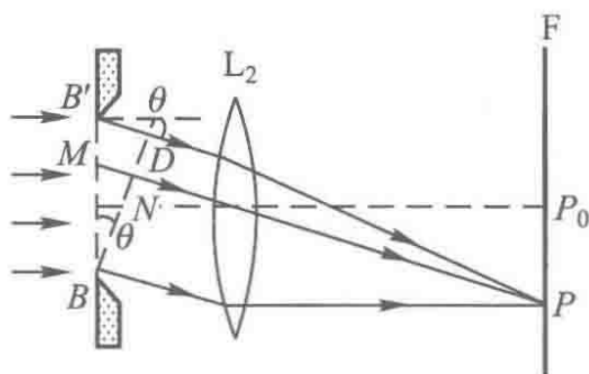


图 2-17 单缝衍射光强分布的推导

平行光束垂直于缝的平面入射时波面和缝平面重合，将宽度为 b 的缝分为一组平行于正常的窄带，从每一条这样的窄带发出次波的振幅正比于窄带的宽度 dx ，单位宽度的振幅为 $\frac{A_0}{b}$ 。再取 BD 平面，平面上各点沿衍射方向通过透镜到达 P 点的光程都相等，所以只要算出 BB' 到 BD 的各平行直线段之间的光程差即可。其复振幅为：

$$d\tilde{E} = \frac{A_0 dx}{b} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta} \quad (2-10)$$

求 $x = 0 \sim b$ 的积分，得到合振幅：

$$A_P = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta} \quad (2-11)$$

光强：

$$I_P = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} = I_0 \text{sinc}^2 u, \quad u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \quad (2-12)$$

3.衍射图样的光强分布

最大值和最小值处，求光强的一阶导数为0处，解以下两式：

$$\sin u = 0, \quad u = \tan u$$

(1) 中央最大值： $\sin \theta_0 = 0$ ，即焦点 P_0 ，光强 $I_{P_0} = A_0^2$ ，次波相位差为0，振幅叠加相互加强。

(2) 最小值位置： $\sin \theta_k = k \frac{\lambda}{b} (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3)$ ， A_P 为0，光屏上是暗的。

(3) 次最大值位置：每两个相邻最小值之间有一极大值，由超越方程 $u = u \tan u$ 解出：

$$u = 0, u_1 = \pm 1.43\pi, u_2 = \pm 2.46\pi, u_3 = \pm 3.47\pi, u_4 = \pm 4.48\pi, \dots$$

最大值位置：

$$\sin \theta_{10} = \pm 1.43 \frac{\lambda}{b} \approx \pm \frac{3}{2} \frac{\lambda}{b}$$

$$\sin \theta_{20} = \pm 2.46 \frac{\lambda}{b} \approx \pm \frac{5}{2} \frac{\lambda}{b}$$

$$\sin \theta_{30} = \pm 3.47 \frac{\lambda}{b} \approx \pm \frac{7}{2} \frac{\lambda}{b}$$

...

$$\sin \theta_{k0} \approx \pm (k_0 + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{b} \quad (k_0 = 1, 2, \dots)$$

次最大光强：

$$A_1^2 = 0.0472, A_2^2 = 0.0165, A_3^2 = 0.0083, \dots$$

4.衍射图样的特点

(1) 各级最大值光强不相等：中央最大值的光强最大，次最大值都远小于中央最大值，并随着级数 k 的增大而很快的减小，第一级次最大值不到中央最大值的5%；

(2) 亮条纹到透镜中心所张的角度称为角宽度中央，亮条纹的角宽度等于其他量条纹角宽度的2倍，相当于两侧的一半条纹拼接起来，形成完整的衍射图样。或也相当于相邻两条纹的级数相减。

$$\text{中央亮条纹的角宽度 } \Delta\theta = (1 - (-1)) \frac{\lambda}{b} = 2 \frac{\lambda}{b}, \quad \text{线宽度 } \Delta \vec{l} = f'_2 \frac{2\lambda}{b}$$

$$k\text{级亮条纹的角宽度 } \Delta\theta = ((k+1) - k) \frac{\lambda}{b} = \frac{\lambda}{b}$$

(3) 最小值处形成的每一侧暗纹是等间距的，而次最大值彼此则是不等间距的，随着级数 k 的增大，次最大值趋近于等间距。

(4) 使用白光作为光源时不同波长，产生的衍射图样中央最大值外彼此错开，且中央最大值宽度也不同。这导致中央亮纹的中心仍是白色的，但边缘露出彩色条纹，其他各级彩色条纹逐渐重叠展开。

(5) 缝宽 b 对衍射图样的影响：

中央最大值半角宽度： $\Delta\theta = \frac{\lambda}{b}$

$b \gg \lambda$ 时， $\Delta\theta \rightarrow 0$ ，衍射条纹压缩成一条亮线，正好是没有障碍物时光源经透镜后所成的像。只有在 $\lambda \ll b$ 的条件下，即 $\frac{\lambda}{b} \ll 1$ ，衍射现象才可忽略不计。反之 λ 越大， b 越小，衍射现象就越显著。

衍射现象显著范围：

$b \approx 10^3 \lambda$ ，衍射不明显，按直线传播处理；

$b \approx 10 \lambda \sim 10^2 \lambda$ ，衍射现象显著，出现衍射图样；

$b \approx \lambda$ ，衍射现象极其明显。

(6) 以上又叫**衍射反比率**，说明：

1°. 反映了障碍物与光波之间限制和扩展的辩证关系，限制范围越小，扩展现象越显著。衍射进行了一种对限制的“反抗”；

2°. 它包含着放大，缝宽减小， $\Delta\theta$ 就增大，属于一种光学放大，可用于激光测径和物质结构分析。

2.4 夫琅禾费圆孔衍射

在单缝衍射装置中用圆孔代替狭缝，仍以激光器做光源，圆孔屏在屏上任一点的光强：

$$I_P = A_0^2 \left[1 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{m^2}{2!}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{m^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{m^2}{4!}\right)^2 - \dots \right]^2 \quad (2-13)$$

其中 $m = \frac{\pi R \sin \theta}{\lambda}$ ， R 为圆孔半径。

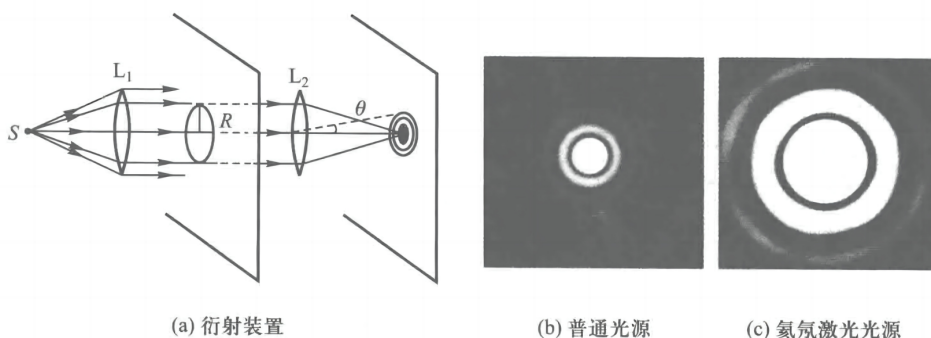


图 2-21 圆孔衍射装置与衍射图样

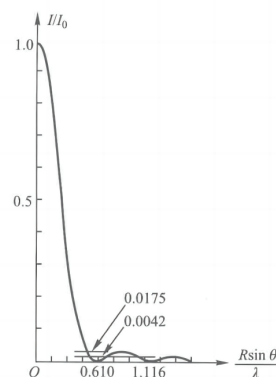


图 2-22 圆孔衍射的光强分布

贝塞尔函数表示：

$$I_P = A_0^2 \frac{J_1^2\left(\frac{2\pi R \sin \theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi R \sin \theta}{\lambda}\right)^2} = I_0 \frac{J_1^2(2m)}{m^2} \quad (2-14)$$

中央最大值位置: $\sin \theta_0 = 0$

最小值位置: $\sin \theta_k = C_k \frac{\lambda}{R}$, $C_k = 0.610, 1.116, 1.619, \dots$, $k = 1, 2, 3, \dots$

最大值位置: $\sin \theta_{k0} = C_{k0} \frac{\lambda}{R}$, $C_{k0} = 0.819, 1.333, 1.847, \dots$, $k = 1, 2, 3, \dots$

最大值相对强度: $A_k^2 = 1, 0.0175, 0.0042, 0.0016, \dots$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

以第一暗环为范围 (围住的区域内) 的中央亮斑的光强, 占整个入射光束光强的84%, 称为**艾里斑**。半角宽度为:

$$\Delta \theta_1 \approx \sin \theta_1 = 0.61 \frac{\lambda}{R} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (2-15)$$

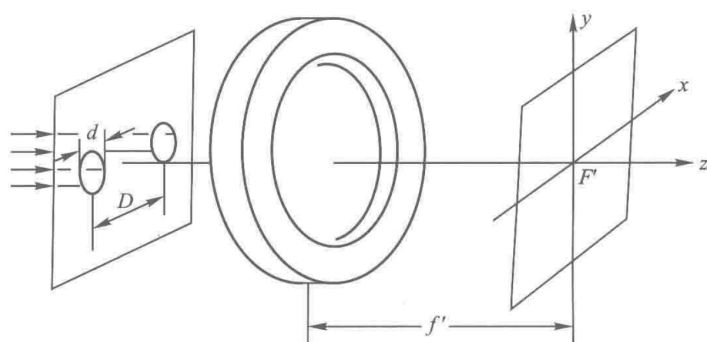
D 是圆孔的直径。

线半径:

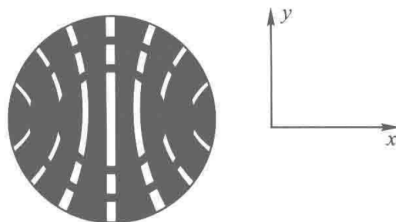
$$\Delta l = f' \tan \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D} f' \quad (2-16)$$

与单缝衍射的半角宽度相比, 除了一个反映几何形状不同的系数外, 二者在定性方面是一致的。

双圆孔衍射: 和双缝干涉的结论一致, 衍射图样为扭曲过的双缝干涉图样。



(a) 双圆孔衍射装置



(b) 衍射图样

例 2.2 图

普通话

2.5 平面衍射光栅

衍射光栅：任何具有空间周期性的衍射屏，分为**反射光栅**和**透射光栅**两类。

光栅的主要用途是用来形成光谱。

1.定性解释

实验装置类似衍射单缝，只是在衍射屏上开出许多平行的狭缝。

光栅常数： $d = a + b$ ， b 为缝宽， a 为两缝间不透明部分的宽度。

光栅密度： $\frac{1}{d}$ ，表示每毫米内有多少狭缝。实验室常采用 $600 \sim 1200\text{mm}^{-1}$

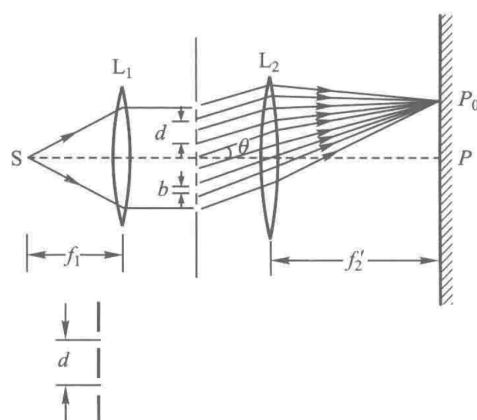


图 2-25 透射光栅实验装置示意图

衍射图样的特征：

- (1) 与单缝衍射图样相比，多缝衍射的图样中出现一系列新的强度最大值和最小值；
- (2) 最大的位置与缝数 N 无关，但是宽度随 N 增大而减小，强度正比于 N^2 ；
- (3) 相邻主最大之间有 $N - 1$ 条暗纹和 $N - 2$ 个次最大；
- (4) 强度分布保留了单缝衍射因子，强度曲线的包迹（外部轮廓）与单缝衍射强度曲线形式一样。

衍射图样形成的物理过程：

- (1) 光屏上所有最大值和最小值的位置分布仅取决于相应的衍射角 θ ，并不随着缝的位置的改变而改变。当狭缝平行于自身做平动时，光屏上的图样仍维持原状，并不跟着移动。
- (2) 考虑到由各缝发出的多光束都是相干的，如果相邻各缝间不透明，部分的宽度也是严格相等的，那么各相邻光束在叠加时有相同的相位差，因而同时将出现多光束干涉图样，即宽大的黑暗背景中出现明晰锐利的亮条纹。
- (3) 如果照射的光由波长不同的成分组成，则每一波长都将产生和它对应的细窄明亮的最大值条纹，这种条纹通常称为光谱线。

2.光栅衍射的强度分布

强度分布公式：

$$A_P = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta} \frac{\sin N\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right)}{\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta} = A_0 \frac{\sin u}{u} \frac{\sin N\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right)}{\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta} \quad (2-17)$$

$$I_P = A_P^2 = A_0^2 \frac{\sin^2 u}{u^2} \frac{\sin^2 N\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right)} = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v} \quad (2-18)$$

其中 $v = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$ 。前半部分 $I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}$ 与单缝衍射形式相同，是与单缝衍射形式相同的包络面，称为**单缝衍射因子**。

光程差和相位差为：

$$\delta = d \sin \theta, \varphi = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = 2v$$

则(2-18)式的后半部分

$$\frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v} = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}N\varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right)}$$

称为**缝间干涉因子**。

光栅衍射的光强是单缝衍射因子和缝间干涉因子的乘积，单缝衍射因子对干涉的主最大起调制作用。

单缝衍射最小值位置： $\sin \theta = k \frac{\lambda}{b} (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$

多缝干涉主最大位置： $\sin \theta = j \frac{\lambda}{d} (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

多缝干涉最小值位置： $\sin \theta = j' \frac{\lambda}{Nd} (j' \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots)$

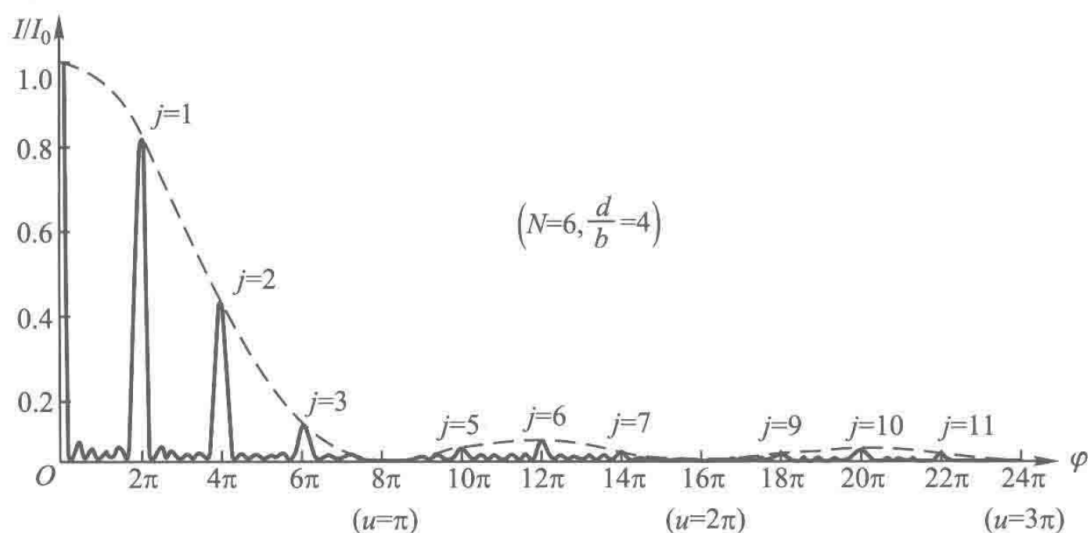


图 2-27 光栅衍射的光强分布

3.双缝衍射

在光栅中令 $N = 2$ ，双缝间的干涉因子就变为双缝衍射的形式：

$$\frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \left(\frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2 = 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

则总体上就成为前面说的单缝衍射和双缝干涉乘积的形式：

$$I_P = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right)^2} \cdot 4 A_0^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

在杨氏双缝实验中得到的实际上是如上式所表示的双缝衍射，图样是一种被单缝衍射调制的双缝干涉条纹。要得到完全的双缝干涉条纹必须满足条件 $b \ll \lambda$ ，则上式退化为完全的双缝干涉，而要达到这一条件，实践难度较大。

4.干涉和衍射的区别和联系

(1) **纯干涉**：当参与叠加的各束光本身的传播行为可近似用几何光学中直线传播的模型描述；

干涉和衍射同时存在：参与叠加的各束光本身的传播明显的不符合直线传播模型。此时对每一束光而言都存在着衍射，各光束之间又存在干涉关系。

(2) 干涉和衍射两者的本质都是波的相干叠加的结果：

相同：

物理角度：考虑叠加时的中心问题都是相位差；

数学角度：相干叠加由干涉的折线过渡到衍射的连续弧线，由有限项求和过渡到积分运算；

区别：

相干叠加：干涉是有限几束光的叠加，衍射是无穷多次波的相干叠加；

精细度：干涉是粗略的，衍射是精细的；

图样：都是明暗相间的条纹，但在光强分布上有间距均匀与相对集中的不同；

5.光栅方程

垂直光束入射光栅方程：

$$d \sin \theta = j \lambda \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2-19)$$

j 称为谱线的级数。

光栅的差错会产生附加最大值的出现，即“鬼线”。现代采用单色激光的双干涉得到的全息光栅，充分利用了干涉条纹具有等宽等间距的特点。

平行光束倾斜的入射到光栅上，光栅方程：

$$d(\sin \theta \pm \sin \theta_0) = j\lambda \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2-20)$$

θ_0 为入射方向与光栅平面的法线之间的夹角， θ 表示衍射方向与法线间的夹角，角度均取正值。法线同侧取正号，法线异侧取减号。

6.谱线的半角宽度

半角宽度：

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} \quad (2-21)$$

如果光源发出的光单色性很好，那么光栅给出的光谱是一组很明锐的谱线。

7.谱线的缺级

谱线的缺级：各级谱线的强度分布与 $\frac{b}{d}$ 有关，如果这个值为整数，某些级数的谱线将消失。

设 $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 为衍射最小值的级数， j 为主最大值的级数，且 $j > k$ ，缺级条件：

$$\frac{d}{b} = \frac{j}{k} \Leftrightarrow \sin\left(j\pi \frac{b}{d}\right) = \sin k\pi = 0$$

即 $j = k\frac{d}{b}$ 时，级数为 j 的谱线消失。

$\frac{b}{d}$ 取不同比值时，如果取零级强度为1：

$$d = 2b, \quad A_1^2 = 0.40, \quad A_2^2 = 0, \quad A_3^2 = 0.045, \quad A_4^2 = 0, \dots$$

$$d = 3b, \quad A_1^2 = 0.675, \quad A_2^2 = 0.17, \quad A_3^2 = 0, \quad A_4^2 = 0.042, \dots$$

(2-19)式是主最大的必要条件，如果出现此时衍射方向恰为单缝衍射的最小，合成光强亦为零，发生缺级现象。

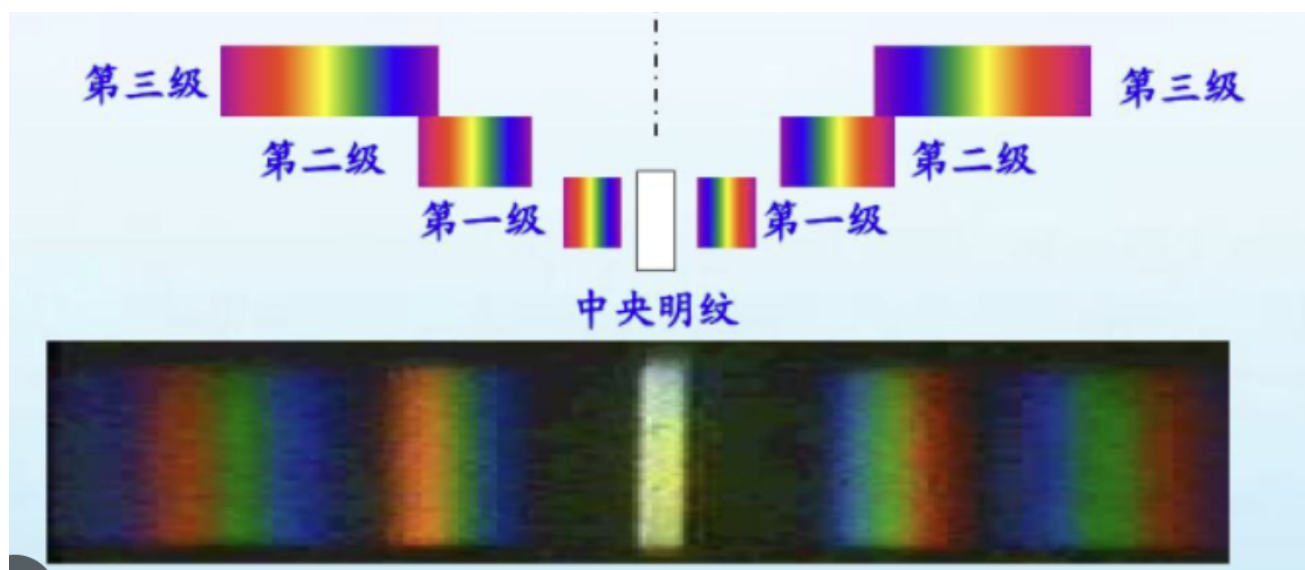
8.光栅光谱

如果入射光是复色光，则除零级以外，各级主最大的位置各不相同，在衍射图像中出现几组颜色不同的谱线，分别对应不同的波长。

光栅光谱：波长不同的同级谱线集合起来构成的一组谱线。

波长越短，谱线的衍射角就越小。在同一级光谱中，紫色的弧线在光谱的内缘，红色的在外缘。光谱的级数以 j 的数值来表示。

中央主最大（零级光谱）仍是白色的，位置居中且无色散，两不同波长的谱线间的距离随着光谱级数的增高而增大。



9.闪耀光栅

透射光栅的缺点：衍射图样中没有色散的零级主最大总是占到总光能的很大一部分，其余的光能分散在各级光谱中，导致各级的光能很少，亮度较低，而实际使用光栅时往往只利用他的光谱。

措施：改变单缝衍射因子——使用反射式的闪耀光栅

闪耀光栅：在玻璃坯上镀一层金属薄膜，然后用特殊形状的金刚石刀在铝膜上刻画出很密的平行刻痕，得到具有一定倾角的锯齿形反射面得到的光栅。

优点：能将单缝的中央最大值位置从没有色散的零级光谱转移到其他有色散的光谱级上，把光能量集中在它上面。此光谱级由闪耀角 θ_B 决定的反射光方向决定。刻痕形状不影响各级组最大的位置。

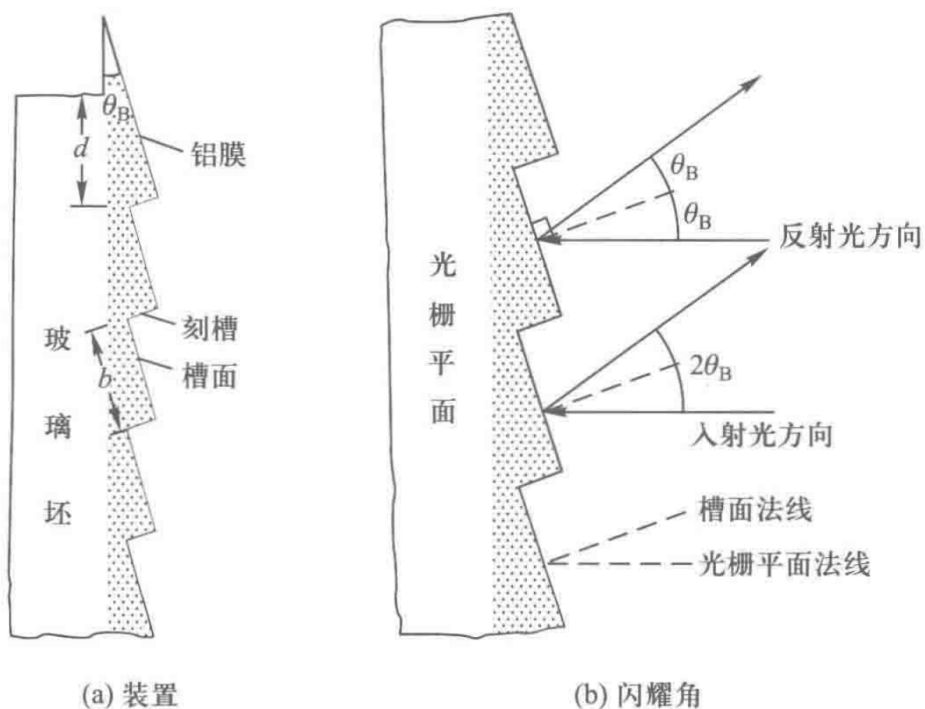


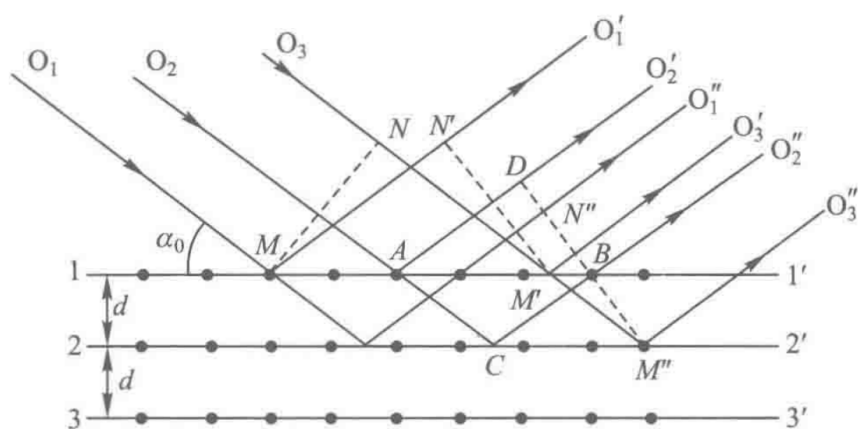
图 2-33 闪耀光栅

2.6 晶体对X射线的衍射

1. 布拉格方程

X射线和可见光一样也是一种波动，而波长比可见光短，和晶体点阵间距的数量级（ $10^{-8}cm$ ）相同，因此可以通过晶体点阵发生衍射。X射线也有连续谱和线状谱。

X射线衍射的布拉格法：要点在于将X射线衍射图样的每一亮点看作是X射线对晶体每一点阵平面簇的相干性反射所导致的结果。（人话：把一系列晶格点阵看作光栅）



布拉格方程：

$$2d \sin \alpha_0 = j\lambda \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (2-22)$$

此方程与光栅的方程形式一致。

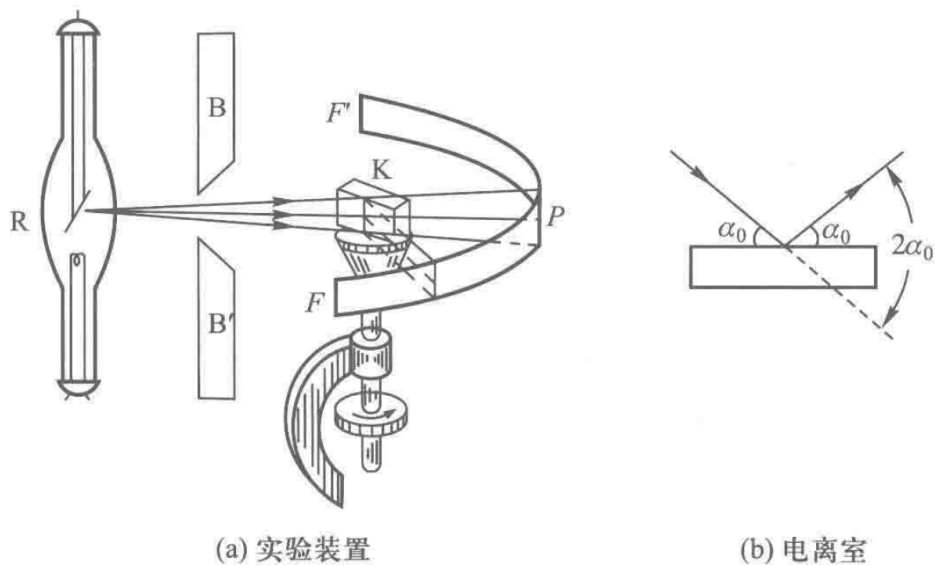
由于这种叠加光束的数目很多，所以图样很细锐。

一束入射光对于这种不同的平面组的掠射角 α_0 可以不同，平面组的间隔 d 也各不相同，但反射出来的X射线只有在满足一定的 α_0 和 d 的条件，才可相互加强而形成斑点。**劳厄照相上的每一斑点都是从某一确定的点阵平面组反射叠加的结果。**

2. 实验方法

(1) **旋转晶体式X射线摄谱仪**：一束很细的X光经过整理后照射到可绕竖直轴旋转的晶体 K 上，当掠射角 α_0 对于某一波长满足布拉格方程时，即发生最强的反射，因而使照相底片上某一点感光成为斑点，即**劳厄斑**。继续转动晶体时，可以依次得到所有波长的这种最强反射。光阑上的窄狭缝平行于晶体的反射面时，感光片的斑点将形成一些黑窄条纹，类似于用普通衍射光栅所得到的线状光谱，称为**劳厄相**。

可以用电离式代替照相影片，用静电计测量电离程度。



(2) **粉末法**：把晶体细粉末压成圆柱体。照射时总有一些粉末晶粒和射线的相对方向满足布拉格方程。所有在相同条件下反射的光线位于一个顶角为的圆锥面上。不同波长和不同级数的反射线位于不同顶角的圆锥面上，称为**德拜相**。

优点：不需要使用很难得到的大块单晶体，也不需要使它有转动的特殊装置。

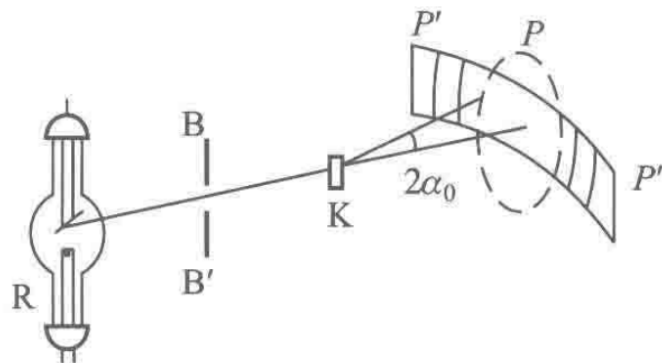


图 2-38 X 射线晶体粉末衍射摄谱仪

第3章 几何光学基本原理

3.1 基本概念和定律

1. 光线 波面

光线表示的只是光的传播方向，不可误认为是从实际光束中借助有孔光阑分出的一束狭窄部分。后者由于衍射，是不能实际得到的。

光波在介质中沿着光线方向传播时，相位不断改变，但同一波面上所有点的相位相同。各向同性介质中光的传播方向总是和波面的法向相重合。

波动光学：反应和研究光的波动性的光学，主要考虑波长、振幅和相位。

几何光学：以几何定律和某些基本实验定律为基础的光学，主要考虑光线和波面。

2.几何光学的基本实验定律

光在均匀介质中的直线传播定律；

光的反射定律和折射定律；

光的独立传播定律，光路可逆原理。

3.费马原理

费马原理：光在指定的两点间传播，实际的光程总是一个极值。这个极值可以是最小值，最大值或恒定值。

$$\int_A^B n ds = \text{极值 (极小值、极大值或恒定值)}$$

实际工程大多是取极小值，椭球面通常是恒定值（椭圆上的点到两焦点的距离之和为恒定值），其中凹椭球面同时也为最大值。

4.单心光束 实像和虚像

如果把发光点看作是一个发散光束的顶点，具有单个顶点的光束称为**单心光束**。

在反射或折射之后，光线的方向虽然改变，但光束中仍能找到一个顶点，即光束的单心性没有破坏，那么这个顶点便是**发光点的像**。

反射或折射没有破坏光束的单心性时，每个发光点都有一个和它对应的像点。

实像：有光束实际会聚的点

虚像：虽然光束发散，但是反向延长线汇聚于一点

对于下一次光学作用来说，不论是实像还是虚像都可看作实物。

3.2 光在平面界面上的反射和折射 光导纤维

几何光学的主要问题：如何保持光束单心性

实际上只有在平面镜反射的情况中，单心性才不被破坏，一般来说，介质界面上的折射使光束不再保持单心性，但适当的条件下光束单心性能够近似的得到满足。

1.光在平面上的反射和折射

(1) 反射如左图，反射光线的反向延长线相交点 P' 点是 P 点的虚像，位于镜后，有：

$$PN = P'N \quad (3-1)$$

P' 点与 P 点关于镜面对称。**平面镜**是一个最简单的，不改变光束单心性的，并能成完善像的光学系统（所以要用平面镜做镜子）。

光源和它的像满足对称关系，所以二者可以在光学系统中等价。

(2) 折射：光束单心性的破坏。

如右图在 xy 平面上 P 点的位置为 $(0, y)$ 光束从 P 点射出经过相近 A_1 、 A_2 两点发生折射。介质的折射率分别为 n_1 和 n_2 ，假定 $n_1 > n_2$ 。 Δi_1 、 Δi_2 均非常小。折射光的反向延长线分别交 y 轴于 P_1 和 P_2 点，并且在平面上相交于 P' 点。

P_1 点纵坐标为：

$$y_1 = \frac{n_2}{n_1} \sqrt{y^2 + \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\right)x_1^2} \quad (3-2)$$

P_2 点纵坐标可以由下标替换得到。

P' 点坐标：

$$\left(y\left(\frac{n_1^2}{n_2^2} - 1\right)\tan^3 i_1, y\frac{n_1}{n_2}\left[1 - \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} - 1\right)\tan^2 i_1\right]^{\frac{3}{2}}\right) \quad (3-3)$$

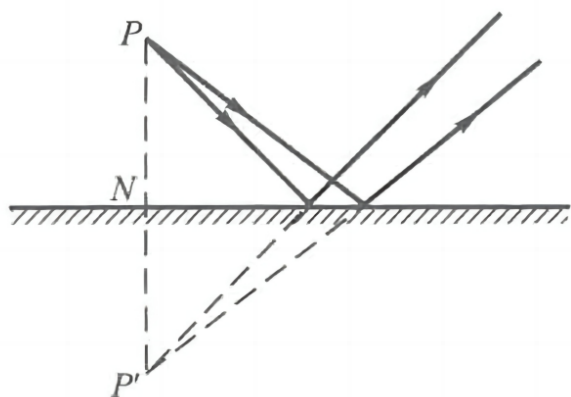


图 3-5 光在平面上的反射

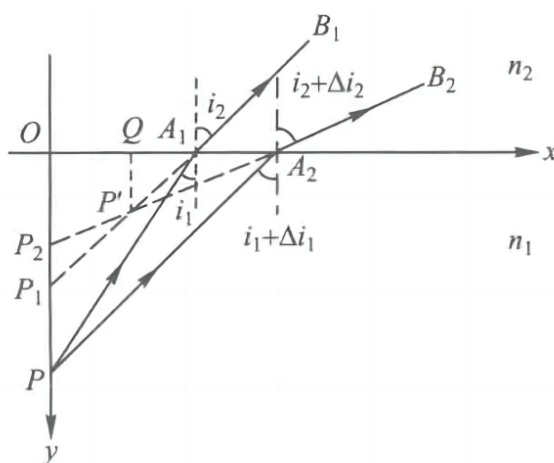


图 3-6 光束折射时单心性的破坏

光束是单心的：只要做出任何两条光线的交点，就能确定所有其他光线都通过这个交点，即为光束的顶点。

光束不是单心的： P' 点不是折射光束的顶点，不同角度的光束使对应的 P' 点形成一条弧线。焦线 P_1P_2 称为**弧矢焦线**， P' 点描出的垂直于图面的焦线称为**子午焦线**。

P 点发出的光束几乎垂直于界面时 P' 的位置为：

$$\left(0, \frac{n_2}{n_1}y\right) \quad (3-4)$$

此时所见的像最清晰，像的深度与实际物的深度之比由上式给出。若 $n_1 > n_2$ ，则 $y' < y$ ，物体似见上升， y' 称为像似深度。

2.全反射 光导纤维

全反射：对光线只有反射而无折射的现象。

全反射有一临界角 i_c ，只有当满足入射角 $i_1 \geq i_c$ 的条件时才能发生。入射和折射所在的介质的折射率分别为 n_1, n_2 ，则：

$$i_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (3-5)$$

全反射可以理解为当入射角过大时，折射角超过90度，从而进入入射角所在的界面。这时折射光线就与反射光线重合，从而出现只有反射光线的情况就发生全反射。

全反射的突出应用是光导纤维。

光导纤维：利用全反射规律，而使光线沿着弯曲路径传播的光学元件，每根纤维分内外两层，内层材料的折射率高于外层材料，从而可以使入射角大于临界角的光线发生全反射，在两层界面上经历多次反射后，呈锯齿形的路线传到另一端。

折射率内层材料 n_1 ，外层材料 n_2 。入射角的限制：

$$i = \arcsin \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (3-6)$$

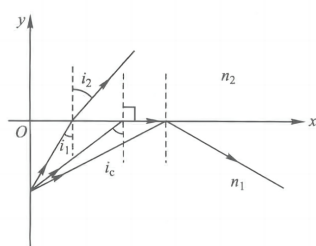
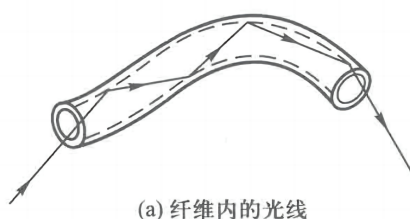
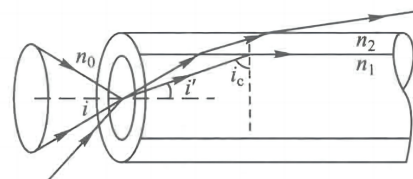


图 3-7 全反射



(a) 纤维内的光线



(b) 结构示意图

图 3-8 光导纤维

3.棱镜

棱镜的用途：1) 作为色散元件；2) 转向元件，利用光在棱镜内的全反射改变光束的元件。

$\angle A$ 为**折射棱角**，单色入射光束通过棱镜时，将连续发生两次折射，出射线和入射线之间的夹角 θ 称为偏向角：

$$\theta_0 = 2i - A \quad (3-7)$$

入射角 $i_1 = \frac{\theta_0 + A}{2}$ ，折射角 $i'_2 = i_2 = \frac{A}{2}$

棱镜材料折射率的计算：

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{\sin \frac{\theta_0 + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad (3-8)$$

色散：不同波长的光在同一介质中的折射率不同，辐射光经过三棱镜的两次折射后，不同波长的光将被分开，紫色光比红色光更偏向棱镜截面的底边，这是棱镜的**分光作用**。

全反射棱镜：临界角小于45度的等腰直角三角形棱镜。从其中一个直角边垂直入射的光线，在斜边上发生全反射后，从另一个直角边出射，这样光线的角度就改变了90度，而能量损失很小（不超过4%）。

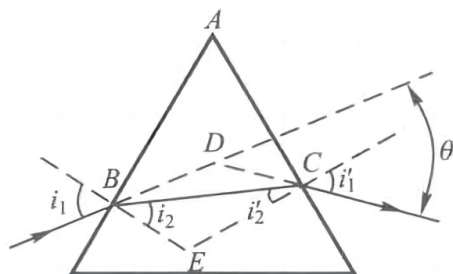


图 3-10 三棱镜的主截面

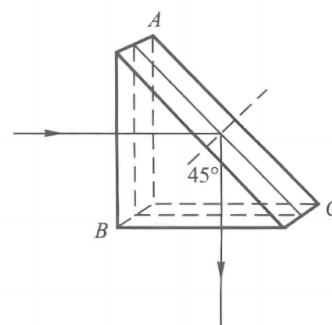


图 3-11 全反射棱镜

3.3 光在球面上的反射和折射

1.新笛卡尔符号法则

定义

顶点：平面的中心点 O

曲率中心：球面的球心 C

曲率半径：球面的半径

主轴：连接顶点和曲率中心的直线 CO

主平面：通过主轴的平面

主轴对于所有的主平面具有对称性。

规定

(1) 线段长度都从顶点算起，光线和主轴的交点处的线段长度的数值，左正右负，上正下负；

(2) 光线方向的倾斜角度从主轴算起并取小于 $\frac{\pi}{2}$ 的角度。光线从主轴或球面法线开始转动，角度逆正顺负。

(3) 图中出现的长度和角度的几何量只用正值。

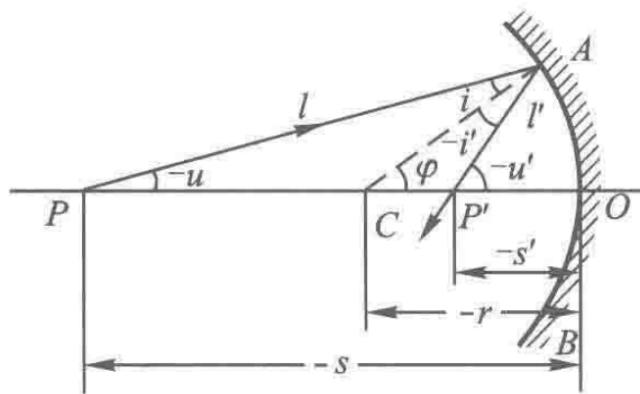


图 3-14 主平面内的球面反射

2.球面反射对光束单心性的破坏

如上图标注，光线 PAP' 光程：

$$\begin{aligned}\Delta_{PAP'} &= nl + nl' \\ l &= [(-r)^2 + (r - s)^2 + 2(-r)(s' - r) \cos \varphi]^{\frac{1}{2}} \\ l' &= [(-r)^2 + (s' - r)^2 - 2(-r)(s' - r) \cos \varphi]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (3-10)$$

A 点在镜面上移动时，半径 r 是常量，角度 φ 是位置的变量，根据费马定理，方程对 φ 求导，令导数为零取到极值或常量，得到物像公式：

$$\frac{1}{l'} + \frac{1}{l} = \frac{1}{r} \left(\frac{s'}{l'} + \frac{s}{l} \right) \quad (3-11)$$

用此式可算出任一反射线和主轴的交点 P' 到 O 点的距离 s' 。

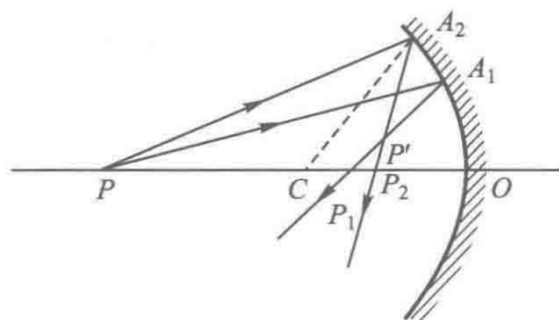


图 3-15 球面反射的子午焦线
和弧矢焦线

如图， $\triangle PA_1A_2$ 展成一单心的空间光束， P' 点为临时焦点描出一条很短的弧线。弧线垂直于图面，是反射光束的**子午焦线**，图面中的 P_1P_2 为**弧矢焦线**。

3.近轴光线条件下球面反射的物象公式

近轴光线条件下, φ 很小, 在一级近似下, $\cos \varphi \approx 1$, 物像公式为:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r} \quad (3-12)$$

对于 r 一定的球面只有一个 s' 和给定的 s , 对应此时存在确定的理想像点, 称为高斯像点, s 称为物距, s' 称为相距。**使用时注意符号法则**。凹球面的反射公式也适用于凸球面反射, 而且在近轴光线条件下, 无论 s 值的大小都适用。

平行光入射时, 沿主轴方向的平行光束经反射后成为汇聚或发散的光束, 其顶点在主轴上, 称为**反射球面的焦点**, 焦点到顶点间的距离称为**焦距**, 用 f' 表示:

$$f' = \frac{r}{2} \quad (3-13)$$

球面反射物像公式可写作:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad (3-14)$$

只要在近轴光线的条件下上视都是球面反射成像的基本公式。

4.球面折射对光束担心性的破坏

球面折射物像公式为:

$$\frac{n'}{l'} + \frac{n}{l} = \frac{1}{r} \left(\frac{n's'}{l'} + \frac{n's'}{l'} \right) \quad (3-15)$$

球面折射也破坏单心性.

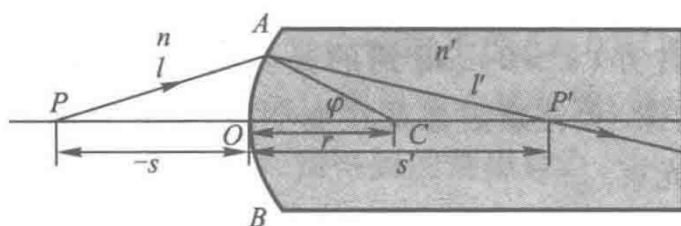


图 3-17 主平面内的球面折射

5.近轴光线条件下球面折射的物像公式

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \quad (3-17)$$

上式右侧为**光焦度** Φ , 表征球面的光学特性, 单位为 m^{-1} 。

$$\Phi = \frac{n' - n}{r} \quad (3-18)$$

此式也适用于凹球面折射。

物点和像点，如果物点在原来的像点上，则原来的物点上必成其相应的像，物点和像点交换也成立。这种关系称为**共轭**，相应的点称为**共轭点**，相应的光线称为**共轭光线**，**物像共轭是光路可逆原理的必然结果**。

入射光束在其中行进的空间为**物空间**，折射光束在其中行进的空间为**像空间**。球面折射的物空间和像空间一般分立在两侧；球面反射的物空间和像空间相重合。

平行于主轴的入射光线折射后和主轴相交的位置称为**球面界面的像方焦点** F' ，从球面顶点到像方焦点的距离称为**像方焦距** f' ：

$$s = -\infty, f' = \frac{n'}{n' - n}r \quad (3-19)$$

把物点放在主轴上某一点时发出的光折射后产生平行于主轴的平行光束，称为**物方焦点** F ，从球面顶点到物方焦点的距离称为**物方焦距** f ：

$$s = \infty, f = \frac{n}{n' - n}r \quad (3-20)$$

二者关系：

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n} \quad (3-21)$$

上式中的负号表示物方和像方焦点永远位于球面界面的左右两侧。

球面反射情况，数学处理上可以认为像方介质的折射率等于物方介质折射率的负值（ $n' = -n$ ，仅在数学上有意义），于是 $f' = f$ 。不必对球面反射的焦点和焦距区分物方和像方，可以把反射看作是折射的特例。

6. 高斯公式和牛顿公式

光具组理想成像时的通用公式：

高斯物像公式：

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1 \quad (3-22)$$

将符号法则的原点替换为焦点，其余不变，则得到**牛顿物像公式**：

$$\frac{f'}{x' + f'} + \frac{f}{x + f} = 1, \text{ or } xx' = ff' \quad (3-23)$$

其中 x 表示物距， x' 表示像距。

3.4 光连续在几个球面界面上的折射 虚物的概念

(1) 光束在两个或两个以上球面界面上折射，使球面系统能最后成像通过，前一个球面的光束必须能通过或部分通过下一个球面，应尽量使用近轴光线。要使多个球面的顶点和曲度中心都在同一直线上，形成**共轴光具组**。

(2) 对于前一个球面来说是出射的折射光束，对下一个球面来说是入射光束。前一个球面所成的像，可看作后一个球面的物，无论这个像是实像还是虚像。

(3) 像的位置在下一个球面之前，它到下一个球面顶点之间的距离即为物距，原点换成下一个球面的顶点，对每一个原点分别应用符号法则。

如果像成在了下一个球面之后，这种光束对于下一个球面来说是入射光束，仍应将其顶点看作是一物点，定义这种物为**虚物**。

发散的入射光束的顶点是实物，会聚的入射光束的顶点是虚物。

3.5 薄透镜

薄透镜：厚度与球面的曲率半径相比，可略去不计。透镜的厚度指一个透镜两表面在其主轴上的间隔。

凸透镜：中间部分比边缘部分厚。

凹透镜：中间部分比边缘部分薄。

主轴：连接透镜两球面曲率中心的直线。

主平面：包含主轴的任意平面。

透镜都制成圆片形，并以主轴为对称轴，圆片的直径称为透镜的孔径。

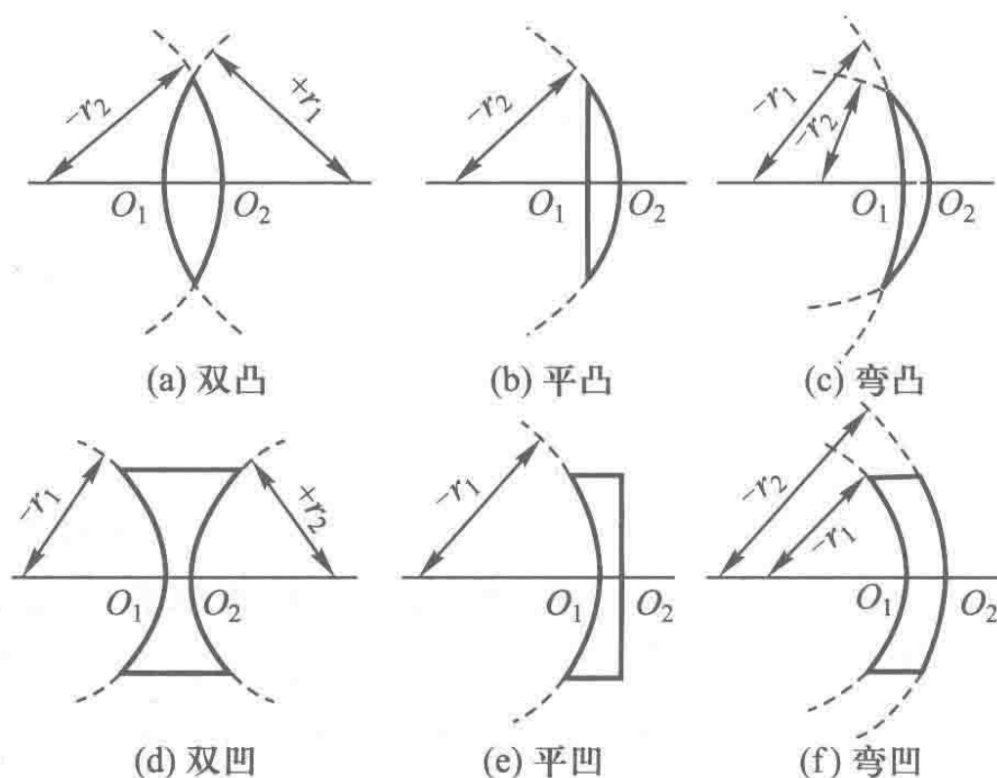


图 3-20 透镜的种类

透镜按整体形状分类有三种：双、平、弯。

注意透镜的分类，有薄厚分和整体形状分两类，不要弄混。凸透镜和凹透镜的区分按厚度区分，不按照整体形状区分。

其余分类还包括胶合透镜、消色差透镜等。

1.近轴条件下薄透镜的成像公式

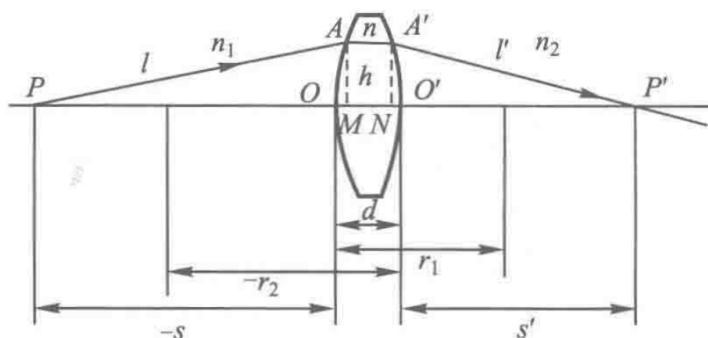


图 3-21 薄透镜主平面内的光线

各参数如上图标注，物像公式为：

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2} \quad (3-24)$$

高斯公式：

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$$

where

$$f = \lim_{s' \rightarrow \infty} s = -\frac{n_1}{\frac{n-n_1}{r_1} + \frac{n_2-n}{r_2}} \quad (3-25)$$

$$f' = \lim_{s \rightarrow \infty} s' = -\frac{n_2}{\frac{n-n_1}{r_1} + \frac{n_2-n}{r_2}}$$

f 为物方焦距， f' 为像方焦距。

因为透镜很薄，两个顶点可以看作重合，在一点一点的折射率相同，通过顶点 O 的光线也都不改变方向，这个点称为**透镜的光心**。薄透镜成像测量距离从光心开始。

判断透镜会聚光束还是发散光束时，要注意透镜两侧的介质。如果透镜两侧的介质的折射率大于透镜介质，那么公式应当反过来：

焦距公式

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad (3-26)$$

高斯公式

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad (3-27)$$

牛顿公式形式完全不变

2. 横向放大率

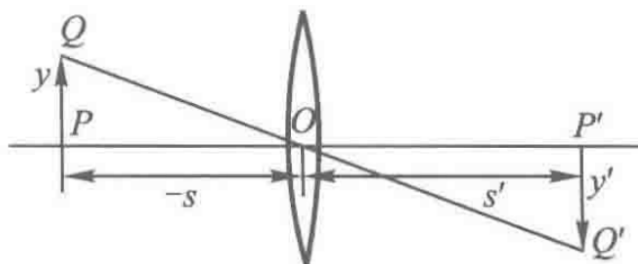


图 3-23 横向放大率示意图

参数如图所示，**横向放大率** β 为像的横向大小与物的大小之比值，即：

$$\beta \equiv \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} \quad (3-28)$$

最后两个形式由牛顿公式而等价。

正值表示像是正的，负值表示像是倒的，绝对值大于1表示像是放大的，绝对值小于1表示像是缩小的。

3. 薄透镜的作图求像法

方法：利用经过两焦点和光心的三条特殊光线中的任意两条画出像点。

物方焦平面：近轴条件下，通过物方焦点 F 与主轴垂直的平面。

像方焦平面：近轴条件下，通过像方焦点 F' 与主轴垂直的平面。

副轴： P 或 P' 与光心 O 的连线，可用来确定倾斜平行光束的方向。

(1) 凸透镜对主轴上的像点的作图法（左图）：

- a. 从 P 点作沿主轴的入射线，折射后方向不变。
- b. 从 P 点作任意光线 PA 与透镜交于 A 点，与物方焦平面交于 B 点。
- c. 作辅助线 BO （即副轴），过 A 作与 BO 平行的折射光线，与沿着主轴的折射光线交于点 P' ，则 P' 就是像点。

也可将以上所述的物方焦平面和副轴换成像方焦平面及对应副轴。

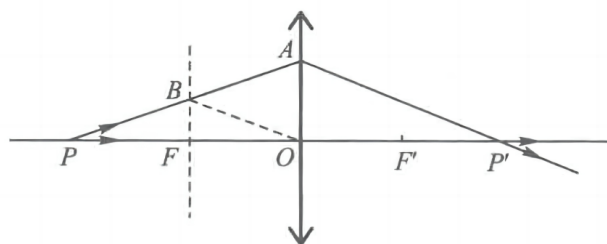
(2) 凹透镜对主轴上的像点的作图法（右图）：

- a. PA 为从物点 P 发出的任意光线，与透镜交于 A 点。

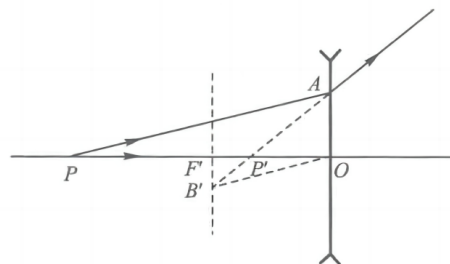
b. 过透镜中心 O 作平行于 PA 的副轴 OB' ，与像方焦平面交于 B' 点。

c. 连接 A 、 B' 两点，线段 AB' 的延长线就是折射光线，它与沿主轴的光线交于 P' 点， P' 点就是所求的像点。

(3) 凸透镜凹透镜对不在主轴上的像点的作图法：保证像点是近轴的，做一条平行光线和一条过光心的光线，按照透镜的折射规律进行折射，得到的交点就是像点。



(a) 利用凸透镜物方焦平面



(c) 利用凹透镜像方焦平面

3.6 近轴物近轴光线成像的条件

费马定理的推论：物体上任意发光点 Q 所发出的光束，经主轴附近的球面反射或折射后，能成像于单独一点 Q' 的条件为，从 Q 发出的所有光线到达 Q' 点时的光程都相等。

1. 近轴物在近轴光线条件下球面反射的成像公式

物距 s ，像距 s' ，球面曲率半径 r ，物高 y ，像高 y' ：

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r} \text{ and } \frac{y}{s} + \frac{y'}{s'} = 0 \quad (3-29)$$

如果 Q 和 P 有相同的 s 值，则 P' 和 P' 也应当有相同的 s 值，如果物是垂直于主轴的线段，则像也是垂直于主轴的线段。

不在主轴上的点能够理想成像的**限制条件**：光线和物点必须是近轴的。

以上的理想成像理论也称为**一级近似理论**。

2. 近轴物在近轴光线条件下球面折射的物像公式

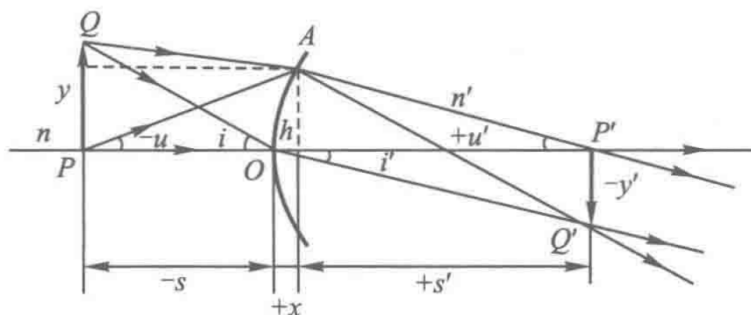


图 3-27 近轴物的球面折射

公式：

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \text{ and } \frac{ny}{s} = \frac{n'y'}{s'} \quad (3-30)$$

也可以用近似的折射定律：

$$\frac{i'}{i} \approx \frac{n}{n'}, \quad \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \cdot \frac{n}{n'}$$

3.亥姆霍兹-拉格朗日定理

入射线 PA 和折射线 AP' 的倾斜角分别为 $-u$ 和 $+u'$ ，则(3-30)右式可写为：

$$n'y'u' = nyu \quad (3-31)$$

即**亥姆霍兹-拉格朗日定理**： y 和 y' 受到近轴物的限制， u 和 u' 受到近轴光线的限制，(3-31)式体现二者的联系。

凡物点不在主轴上而能理想成像，即能够保持光束单心性的，都必须满足亥姆霍兹-拉格朗日定理。

对横向放大率 $\beta = \frac{y'}{y}$ 和角度放大率 $\gamma = \frac{u'}{u}$ （任意一条光线和主轴的夹角在通过光驱组前后的比，其光速汇聚和发散程度的比），**亥姆霍兹-拉格朗日定理的第2种写法**：

$$\frac{n}{n'} = \beta\gamma \quad (3-32)$$

这说明二者的乘积是一常数，二者的变化总是相互伴随。定理限制了使用光学系统改变光束形式的自由。

3.7 共轴理想光具组的基点和基面

思想：以等效的光具组代替整个共轴光学系统，并设法找出这个光具组包括焦点在内的基点，即可忽略光的实际路径，而确定像的大小和位置。

高斯的纯几何理论：理想光具组可以保持光束单心性以及像和物在几何上的相似。理想光具组中物方任意点都与像方的一点共轭，对应于物方的每一条直线或每一个平面在像方都有一条共轭直线或一个共轭平面。

高斯理论的要求：光线近轴，光具组不要求是薄的，用基点和基面（焦点和主点、焦平面和主平面。）研究问题。

⇒研究厚透镜和复合光具组。

1.厚透镜

P ——物点； P' ——像点； F ——物方焦点； F' ——像方焦点；各参数如下图表示：

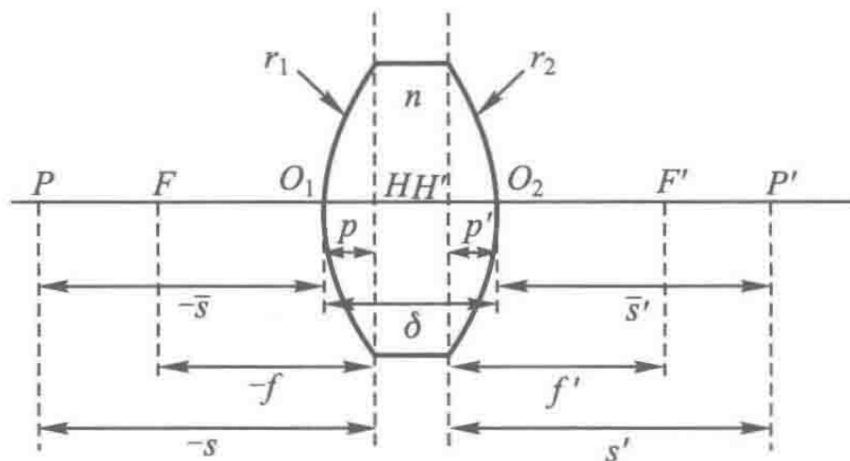


图 3-29 厚透镜的基点和基面

$$\begin{cases} \frac{n}{s'_1} - \frac{1}{\bar{s}} = \frac{n}{f'_1} \\ \frac{1}{\bar{s}'} - \frac{n}{s'_1 - \delta} = -\frac{n}{f_2} \end{cases} \quad (3-33)$$

$$\frac{1}{\bar{s}' - p'} - \frac{1}{\bar{s} - p} = \frac{1}{f'} \quad (3-34)$$

$$f' = \frac{-f'_1 f_2}{n(f'_1 - f_2 - \delta)}$$

δ 为透镜的厚度。

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{\delta(n-1)}{nr_1 r_2} \right] \quad (3-35)$$

解得：

$$p = -\frac{\delta f'(n-1)}{r_2 n} = -\frac{\delta f'}{f_2} \quad (3-36)$$

$$p' = -\frac{\delta f'(n-1)}{r_1 n} = -\frac{\delta f'}{f'_1}$$

令：

$$s = \bar{s} - p, \quad s' = \bar{s}' - p'$$

得到空气中**厚透镜物像公式的高斯形式**：

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad (3-37)$$

H ——物方主点， H' ——像方主点，是对应物距和像距的测量起点。通过这两点垂直于主轴的平面，称为**物方主平面**和**相方主平面**。通过 F 点和 F' 点并垂直于主轴的平面分别，称为**物方焦平面**和**相方焦平面**。主点至焦点的距离即为**焦距**，分别从双方主点量起。

同样，**牛顿公式**：

$$xx' = ff' \quad (3-38)$$

光具组的两个主平面是共轭平面，面上任一对共轭点到主轴的距离相等。

节点：通过节点的任意共轭光线方向不变。

节点的作法：作平行光1通过光具组，折射出的光线2经过像方焦点。从物点做一平行于光线2的入射光线3，折射光线4从光线3与主平面交点的等高点出射，保持与光线2平行，则光线4与主轴的交点就是节点。

2.复合光具组

如下图，对应定义不变：

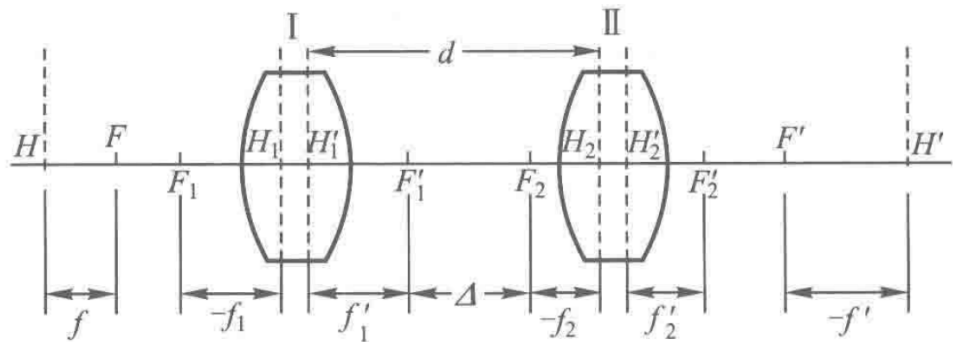


图 3-31 复合光具组的基点与基面

$$\begin{aligned} f' &= \frac{f_1' f_2}{\Delta} = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} \\ p &= -\frac{f_1' d}{\Delta} = \frac{f_1 d}{\Delta} \\ p' &= -\frac{f_2 d}{\Delta} = \frac{f_2' d}{\Delta} \end{aligned} \quad (3-39)$$

空气中焦距公式：

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{d}{f_1' f_2'} \quad (3-40)$$

光具组互相接触时：

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} \text{ and } p' = p = 0 \quad (3-41)$$

光焦度形式：

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (3-42)$$

高斯公式、牛顿公式采用基点计算时，仍旧成立。

所以在此情况下，如果使用基点来计算各参数的话，那么高斯公式和牛顿公式可适用于任何理想共轴光具组。

第4章 光学仪器的基本原理

4.1 人的眼睛

1.人眼的结构

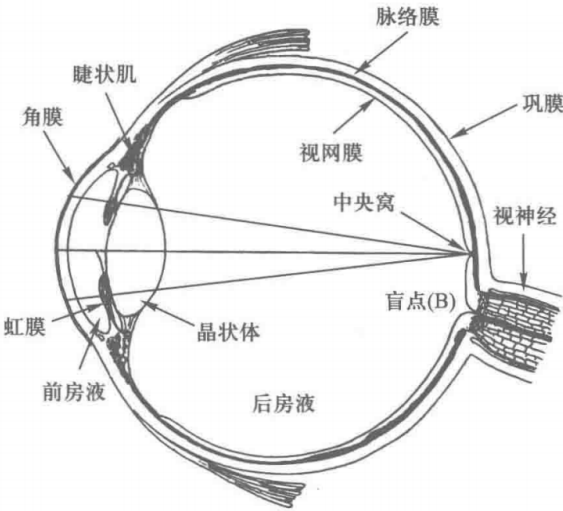


图 4-1 人眼的结构

如上图是人眼的结构。人眼近似为一球形，直径约为2.4厘米。眼睛最外层唯一白色坚韧的膜称为**巩膜**，巩膜在眼球前部突出的透明部分称为**角膜**，曲率半径约为8毫米。巩膜内面是不透光的**脉络膜**，使眼内成为一暗房。脉络膜的前方是一带颜色的彩膜，称为**虹膜**。虹膜中心的圆孔称为**瞳孔**，作用是调节进入眼内的光通量，与有效光阑相类似。**晶状体**由折射率约为1.42的胶状透明物质组成，形成**双凸透镜**，前后两面的曲率半径分别约为10毫米和6毫米，边缘固结于**睫状肌**上。

晶状体将人眼分为互不相通的两个空间。前面是**前房**，充满一种透明稀盐溶液；后面是**后房**，充满含有大量水分的胶性透明液体，称为**玻璃体**。两种液体的折射率都是1.33，与水类似。视神经从眼球后面进入眼内，在眼内脉络膜上分布成一层极薄的膜，称为**视网膜**。B点处由于视神经进入眼球，不引起视觉，称为盲点。**中央窝**在**黄斑**的中心，此区域视觉最灵敏。**眼睛观察物体时，眼球会转到一适当位置，所呈的像恰好在黄斑点内中央窝处，从而引起清晰的视觉。**

2.简化眼

从几何光学的观点可以把人眼抽象成一个共轴光具组，可以在视网膜上形成清晰的像。这个工具组可以简化成只有一个折射平面的**简化眼**，参数如下：

常量	量值	常量	量值
折射率 n'	4/3	光焦度 Φ	$58.48m^{-1}$
折射面的曲率半径 R	5.7 mm	视网膜的曲率半径 R'	9.8 mm
物方焦距 f	-17.1 mm	像方焦距 f'	22.8 mm

3.人眼的调节功能

眼睛通过物体在视网膜上所呈的像对眼的光心的张角大小来判断物体的大小，这里的光心即**简化眼的曲率中心**。人眼只能对波长为 $390 \sim 760nm$ 的光产生感觉。

眼的调节：为了使距离不同的物体都能在视网膜上形成清晰的像而改变眼睛的焦距。

睫状肌松弛→曲率半径变大→远处的物体能够呈清晰的像→最远点为远点

睫状肌收缩→曲率半径变小→近处的物体能够呈清晰的像→最近点为近点

正常的眼睛在适当的照明下，观察眼前 $25cm$ 处的物体是不费力的，而且能看清楚物体的细节，称为**明视距离**。

非正常眼：近点和远点不在正常位置的眼。远点变近→近视眼；近点变远→远视眼。

散光眼：角膜是一个椭球面。

4.2 助视仪器的放大本领

眼睛前配置注射光学仪器时，线状物通过仪器和眼睛在视网膜上形成的像长度为 l' ，直接通过眼镜形成的像的长度为 l 。放大本领：

$$M = \frac{l'}{l} = \frac{\tan U'}{\tan U} \approx \frac{U'}{U} \quad (4-1)$$

U 和 U' 为视角，分别为物体直接对眼的张角，和像对眼的张角。上式的几个量并不是共轭量。

要提高目视能力，不但应使物体对眼有足够大的张角，而且还应使物体与眼睛间有合适的距离，这两个要求相互制约。可以在眼睛前面配置一个凸透镜来解决这一问题，即**放大镜**。放大本领为：

$$M = \frac{U'}{U} = \frac{25cm}{f'} \quad (4-2)$$

f' 为像方焦距，若 $f' = 10cm$ ，则 $M = 2.5$ ，写作 $2.5\times$ 。一般采用 $3\times$ 。

4.3 目镜

放大镜用来直接放大实物，目镜用来放大其他光具组所成的像。目镜通常由不相接触的两个薄透镜组成，面向物体的称为**场镜（场镜）**，接近眼睛的称为**接目镜（视镜）**。目镜的设计还需要注意像差的矫正，可配备一块**分划板**，包含一组叉丝或透明刻度尺，以提高测量精度。

目镜也可用来使倒立像变成正立像，如天文望远镜中的**正视镜**。

(1) **惠更斯目镜**：由两个同种玻璃的平凸透镜组成，凸面向物镜。

场镜的焦距等于视镜焦距的3倍，间距等于视镜焦距的2倍。物镜射来的会聚光束原本成实像于 Q 处，通过目镜成实像于 Q' 处。

调节：成像位于无限远：可调节物镜的距离，使 Q' 点恰好落在视镜的物方焦平面 F_2' 上；欲配备叉丝或刻度尺：装于 Q' 点，使它们的像和目的物的像在眼睛视网膜上同一点出现，并考虑视镜像差的影响。

惠更斯目镜的视场相当大，可达 40° ， 25° 范围内更清晰，且结构简单。

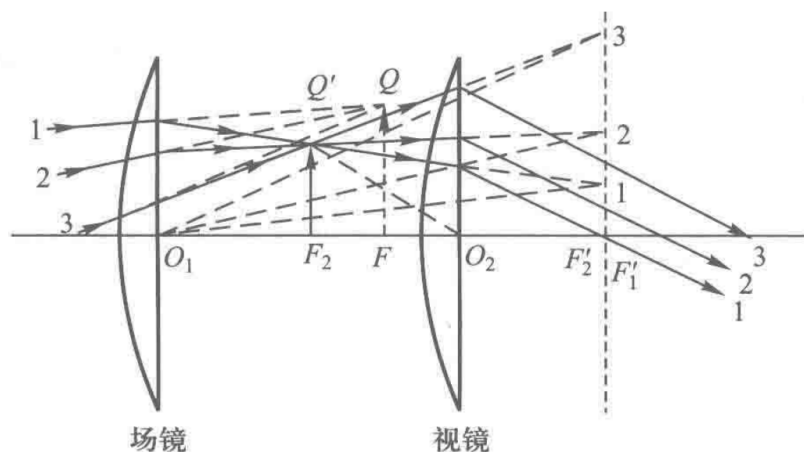


图 4-4 惠更斯目镜

(2) **冉斯登目镜**：由同种玻璃的凸透镜组成，焦距相等，凸面相向，平面相背。

两透镜间的距离等于每一透镜焦距的 $\frac{2}{3}$ ，整个目镜的第一焦点 F 与场镜间的距离等于单个透镜焦距的 $\frac{1}{4}$ 。

要使最后的像位于无限远，物点 Q 正好落在整个目镜的物方焦平面 F 上，分划板即设置在此。

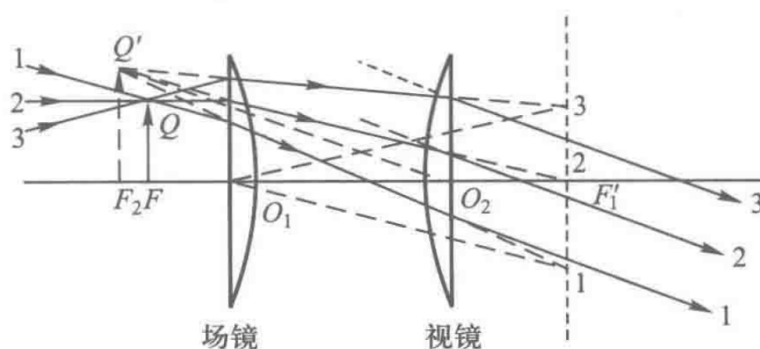


图 4-5 冉斯登目镜

两种目镜的使用情景：冉斯登目镜可做一般放大镜观察实物，惠更斯目镜只能用来观察像。冉斯登目镜的物平面上加一分划板，可对被观察的物体或物镜所呈的实像进行长度的测量，然而惠更斯目镜由于有像差而不能进行。

4.4 显微镜的放大本领

1. 显微镜的光路图

将待观察的物 PQ 置于物镜的物方焦平面 F_1 外很近处，使成的实像 $P'Q'$ 尽量大，经目镜放大形成左侧的虚像 $P''Q''$ 。光路图可用3.5节介绍的方法作出。

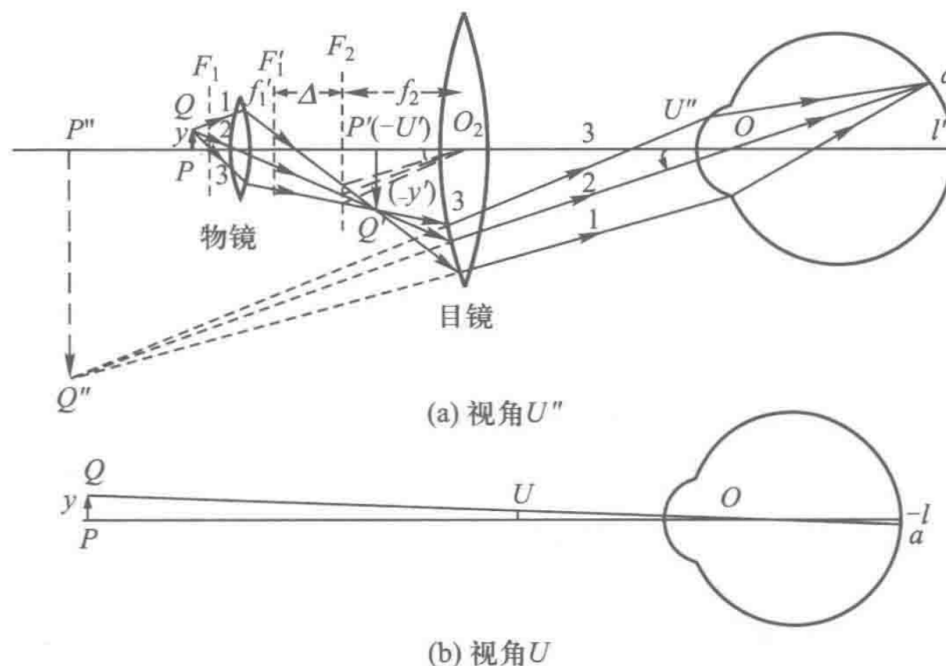


图 4-6 显微镜的光路图和放大本领

2. 显微镜的放大本领

焦距 f ，物/像距 s ，光学间隔 Δ ，长度 y ，视角 U ；下标1代表物镜，2代表目镜；无'代表物方，有'代表像方。

物距 $s \approx f_1$ ，横向放大率：

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \approx \frac{s'}{f_1} = \frac{s'}{-f_1'} = -\frac{s'}{f_1'}$$

像长：

$$-y' \approx y \frac{s'}{f_1'}$$

将目镜当做放大镜，将 $P'Q'$ 放大，视角：

$$U' \approx -\frac{y'}{f_2} = \frac{y'}{f_2'} \approx -\frac{ys'}{f_1'f_2'}$$

$$U \approx \frac{y}{25\text{cm}}$$

又 $s' \approx l$ (l 为镜筒长)，放大本领：

$$M = \frac{U'}{U} \approx -\frac{l}{f'_1} \frac{25\text{cm}}{f'_2} \quad (4-3)$$

上式的结构，相乘两个式子左边的是物镜，右边的明显是目镜的式子，符号代表像是倒的。

显微镜的放大本领等于物镜的横向放大率和目镜放大本领的乘积。

4.5 望远镜的放大本领

1. 开普勒望远镜

有两个会聚薄透镜分别作为物镜和目镜所构成的天文望远镜，又称**折射式望远镜**。

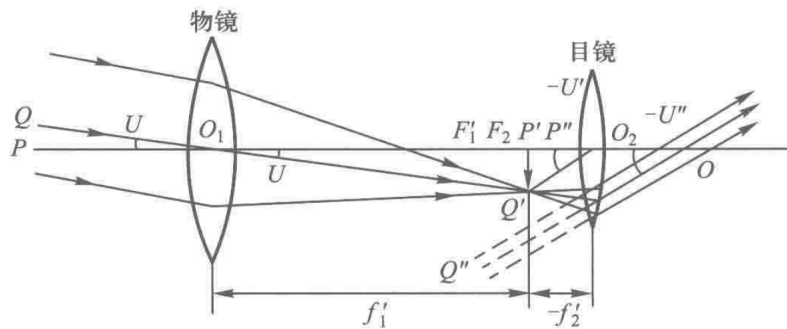


图 4-7 开普勒望远镜的光路图和放大本领

如图可得：

$$\begin{aligned} -U' &= \angle P'Q_2Q' \approx \frac{P'Q'}{-f_2} = \frac{-y'}{-f_2} \\ U &= \angle P'O_1Q' \approx \frac{P'Q'}{f'_1} = \frac{-y'}{f'_1} \end{aligned}$$

放大本领为：

$$M = \frac{U'}{U} = \frac{f'_1}{f_2} = -\frac{f'_1}{f'_2} \quad (4-4)$$

物镜的焦距 f'_1 越长，目镜的焦距 f'_2 越短，望远镜的放大本领就越大。物镜和目镜的像方焦距同号为负，而放大本领 M 为负值，形成的是倒立的像。

2. 伽利略望远镜

特点是用发散透镜做目镜。

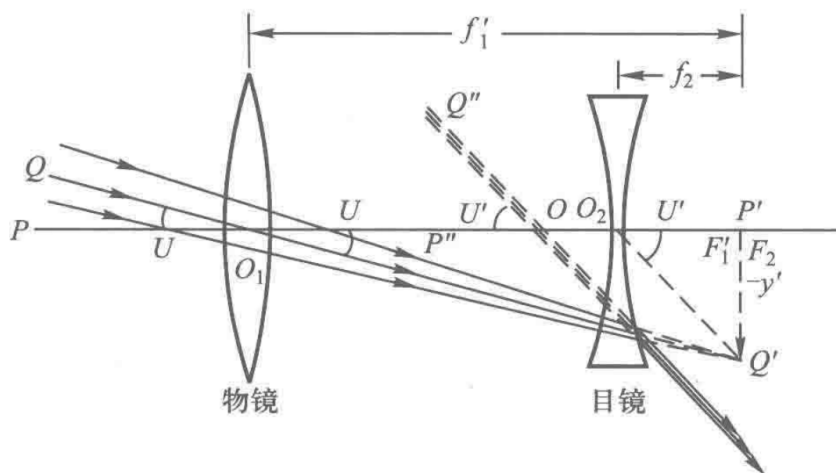


图 4-8 伽利略望远镜的光路图和放大本领

由图可得：

$$U = \angle PO_1Q = \angle P'O_1Q' \approx \frac{P'Q'}{f'_1} = \frac{-y'}{f'_1}$$

$$U' = \angle P''OQ'' \approx \frac{P'Q'}{f_2} = \frac{-y'}{f_2}$$

放大本领与(4-4)式相同。物镜和目镜的像方焦距反号，放大本领为正，故成正立的像。

望远光具组：光学间隔等于零的复合光具组，特点是平行光束入射时，出射的仍是平行光束，但方向改变，整个光具组的焦点和主平面都在无限远处。

开普勒望远镜和伽利略望远镜的对比

(1) 视场：伽利略望远镜透射平行光束共同通过的o点位于镜筒内。眼镜无法至于该点而丢失部分光线，故视场较小。开普勒望远镜的视场则较大。

(2) 测量装置：开普勒望远镜的目镜的物方焦平面在镜头以内，此处可以放置叉丝或刻度尺，伽利略望远镜不行。

(3) 镜筒长度：伽利略望远镜为物镜和目镜焦距绝对值之差，镜筒较短。开普勒望远镜为物镜和目镜焦距绝对值之和，镜筒较长。

无论哪一种望远镜，物镜的横向放大率都小于1。

3.反射式望远镜

反射望远镜：使用反射镜成像的望远镜。

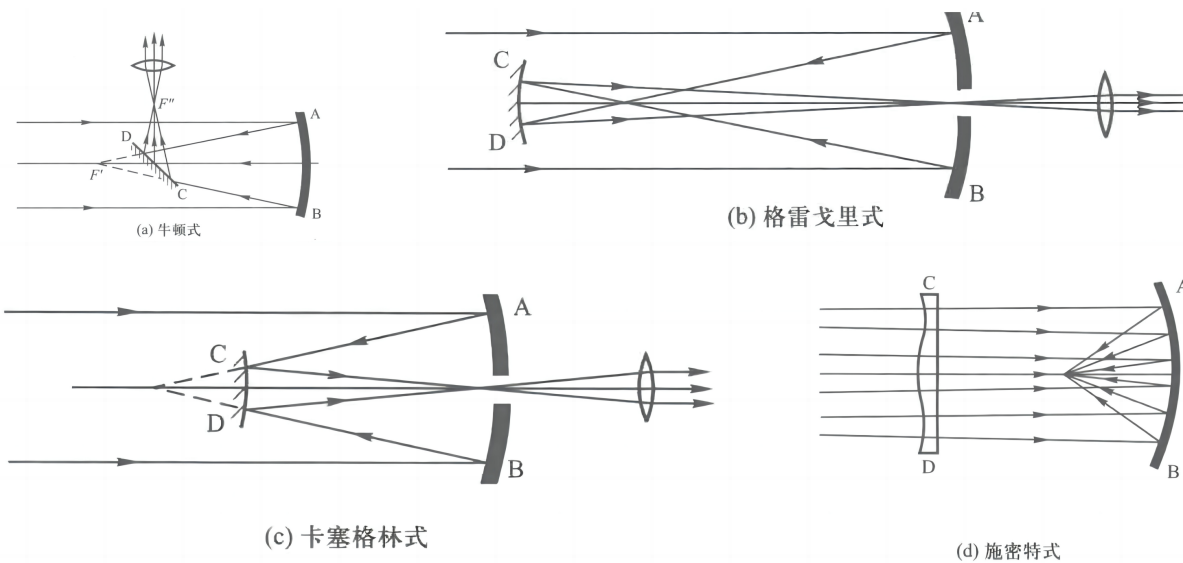
优点：

1°.反射光谱范围比较广，且不致产生色差。

2°.反射镜形状合适时能校正球差。

3°.大孔径的反射镜比大孔径的透镜容易制造。

反射式望远镜有以下几类：



反射式望远镜通常用于大型天文望远镜，近代望远镜中一般都采用施密特物镜。

4.激光扩束器

某些激光器发出的激光束直径很小，可以通过一个倒置的高质量望远镜实现扩束，这个望远镜就是**激光扩束器**。激光扩束器和折射望远镜不同的是用发散透镜接收入射光束，并从会聚透镜射出。

色差优点：通常望远镜目镜采用消色差的复合透镜倒过来作为扩充器时，正好适用于单色激光。

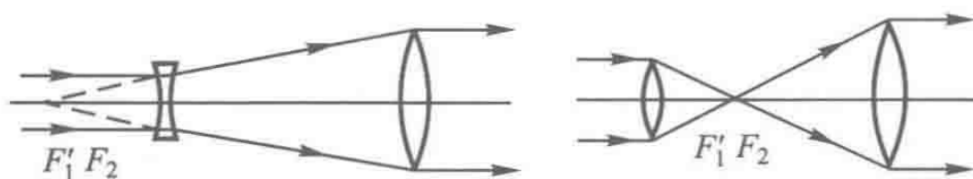


图 4-10 激光扩束器原理图

激光测距仪发射激光使用倒装的伽利略式望远镜。

要求不高的情况下，激光扩束还可以采用20×或40×的显微镜物镜或焦距很短的发散透镜，甚至可用短焦距的凸面或凹面反射镜。

4.6 光阑 光瞳

1.光阑的概念

讨论光学仪器时，需要考虑到光束截面积的大小。像的明亮程度取决于光能流的多少，光学元件的边缘或一个有一定形状的开孔的屏，在光学系统中起着限制光束的作用，称为**光阑**。

在一些光学仪器中，为了改善成像的质量，常装有附加光阑，比如照相机的光圈。

如果对摄影有了解，可以知道，照相机的光圈主要用来调节照相的亮度。实际上它的原理就是限制光束的截面积，从而改变光能流的多少。光圈变小时光能流减少，则像的亮度降低，反之亦然。

2.有效光阑和光瞳

在一个光学系统中不同的光学器件对光束的限制可能不同，比如前一个透镜所出射的光束，有可能能够覆盖整后面的整个透镜，甚至覆盖面积比透镜更大，也有可能只能覆盖后面透镜的一部分。我这种覆盖没有超过后面透镜的大小，那么所有的光束都可以被后面的透镜所接收，但是如果超过了其大小，那么就会导致一部分光能丢失。透镜的直径，或光阑孔的直径，称为**孔径**。

有效光阑（孔径光阑）：在所有各光阑中，限制入射光束最起作用的那个光阑。

有效光阑被前面部分的光具组所成的像称为**入射光瞳**，被后面部分的光具组所成的像称为**出射光瞳**。出射光瞳其实就是入射光瞳被整个光具组所成的像，因为它们对整个光具组来讲是共轭的。

3.有效光阑和光瞳的计算

方法：先求出每一个给定光阑包括透镜边缘 对其前面（向物空间方向）那一部分光具组所能成的像，找出所有这些像和第一个透镜边缘 对指定的物点所张的角，在这些张角中找出最小的那一个和这最小的张角对应的光阑，就是对于该物点的有效光阑。

有效光阑在整个光具组的最前面时与入射光瞳重合，在最后面时与出射光轴重合。任何一个光瞳可能是虚像或实像；出射光瞳的位置可能在入射光瞳的前面或后面。

入射孔径角（孔径角）：入射光瞳半径两端对物平面与主轴的交点所张的角。

出射孔径角（投射角）：出射光瞳半径两端对像平面与主轴的交点所张的角。

有效光阑的位置将随物点位置的变化而变化，总是对某一个指定的参考点而言的。对于单独的一个薄透镜，有效光阑的入射光瞳和出射光瞳都有透镜本身的边缘相重合，与物点的位置无关。

图时用基点基面作图法确定出像点的位置，然后找出入射光瞳和出射光瞳，正确的表示它们的位置和大小，然后把边缘各点分别和物点像点用直线连接起来，就可以得到顶角的大小，从而确定有效光阑，如图。

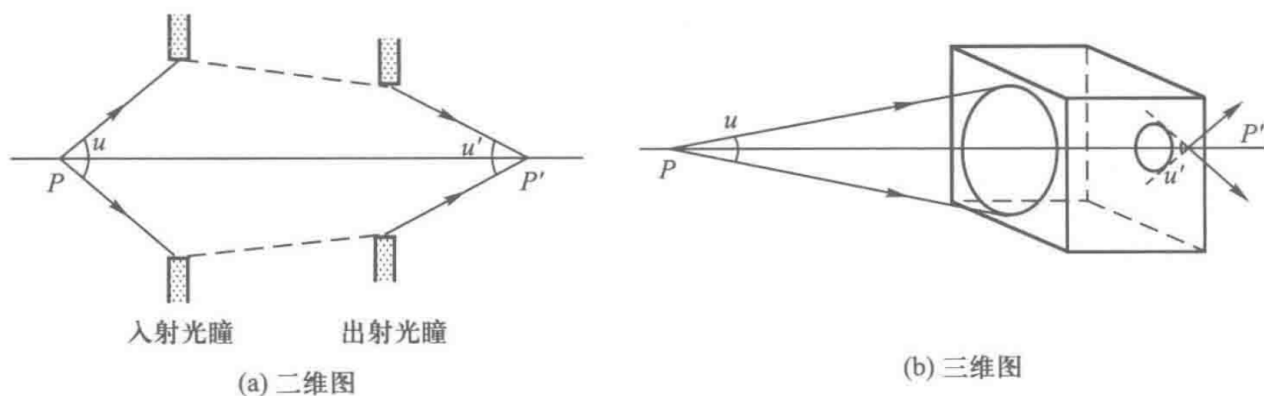


图 4-15 入射孔径角和出射孔径角

4.视场光阑、入射窗和出射窗

视场：光学系统让物体成像的物空间范围。

视场光阑：限制视场大小特别起作用的光阑。

入射窗：视场光阑通过它前面的系统所成的像。

出射窗：视场光阑通过它后面的系统所成的像。

4.7 光度学概要——光能量的传播

1.辐射通量

设光源表面 S 向所有方向辐射出各种波长的光:

辐射通量：单位时间内一个面积元 dS 辐射出来的所有波长的光能量，或通过该面元的辐射功率。

分布函数 $\vec{e}(\lambda)$ （谱辐射通量密度）：单位时间内通过光源面积元的 某一波长附近的单位波长间隔内 的光能量。

λ 到 $\lambda + d\lambda$ 间的光辐射通量： $d\varepsilon_\lambda = e(\lambda)d\lambda$

总辐射通量： $\varepsilon = \int_0^\infty e(\lambda)d\lambda$

2.光视效率

光的视觉灵敏度：引起强度相等的视觉情况下，若所需的某一单色光的辐射通量愈小，则说明人眼对该单色光的视觉灵敏度愈高。

人眼对黄绿色光最灵敏，对绿色和紫色光较差，而对红外线和紫外线则无视觉反应。

光视效率：用于表征光的视觉灵敏度，与 $555nm$ 波长的光进行比较

$$v(\lambda) = \frac{\Delta\varepsilon_{555}}{\Delta\varepsilon_\lambda} \quad (4-5)$$

以下是光效率实验图线。暗视觉曲线的峰值向短波方向移动了约 $50nm$ ，当不同的单色光辐射通量能够产生相等强度的视觉时，光视效率与这些单色光的辐射通量成反比。波长为 $555nm$ 时曲线具有最大值，通常取它作为单位1。

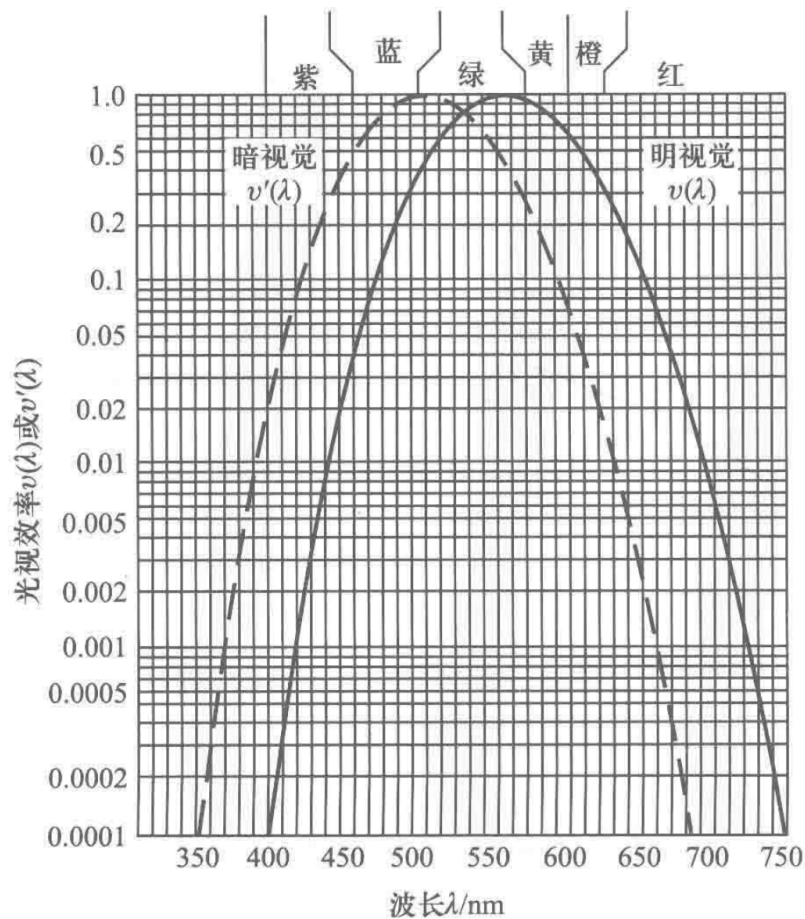


图 4-17 光视效率

3.光通量

光通量：光源表面的客观辐射通量使人眼所引起的视觉强度，用 Φ_v 表示。

对波长间隔为 $d\lambda$ 的单色光：

$$\begin{aligned} d\Phi_v(\lambda) &= k_m v(\lambda) d\varepsilon_\lambda \\ \text{where} \\ k(\lambda) &= k_m v(\lambda) \end{aligned} \quad (4-6)$$

$k(\lambda)$ ——光谱光视效能； k_m ——最大光视效能、最大光效率

$k(\lambda) = \frac{d\Phi_v}{d\varepsilon_\lambda}$ 其实是波长为 λ 的辐射的功的光当量（折算的光能）。 $k_m = 683 \text{ lm/W}$ 。

单色光光通量： $d\Phi_v(\lambda) = 683 v(\lambda) d\varepsilon_\lambda$

复色光光通量： $\Phi_v = \int d\Phi_v(\lambda) = 683 \int_0^\infty v(\lambda) e(\lambda) d\lambda$

电光源的遍计发光效率：

$$\eta = \frac{\Phi_v}{P} = \frac{683 \int_0^\infty v(\lambda) e(\lambda) d\lambda}{P}$$

P 为电光源的发光功率。电光源的遍计发光效率不高，因为输入光源的电功率不能全部转化为电磁辐射通量，而电磁辐射通量中又只有一部分落在可见光波段。

4.发光强度

发光强度：表征光源在一定方向范围内发出的光通量的空间分布的物理量，可用点光源在单位立体角中发出的光通量来量度。

$$I = \frac{d\Phi_v}{d\Omega} \quad (4-7)$$

极坐标下， $I_{\theta,\varphi}$ 是沿某方向的发光强度，则总光通量为：

$$\Phi_v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_{\theta,\varphi} \sin \theta d\theta$$

光通量表征光源的特性。对指定的发光体，光具组作用只是把光通量重新分配，不能增加总光通量。

发光强度单位： cd （坎[德拉]），一光源在给定方向上的发光强度，该光源发出频率为 $5.40 \times 10^{14} Hz$ 的单色辐射，且在此方向上的辐射强度为 $(1/683)W/sr$ 。 sr 为球面度

5.照度

照度 E ：表征受照面被照明程度的物理量。单位 lx （勒[克斯]）

$$E = \frac{d\Phi_v}{dS} \quad (4-8)$$

点光源：

$$E = \frac{Id\Omega}{dS} = \frac{I \cos \alpha}{R^2}$$

R ——点光源距受光物体元面积中心的距离。点光源所造成的照度反比于光源到受照面的距离的平方，正比于光束的轴线方向与受照面法线间夹角 α 的余弦。

面光源的出射度 M ：单位面积的面元发出的总光通量。单位 lx

$$M = \frac{d\Phi_v}{dS} \quad (4-9)$$

6.亮度

比如点光源扩展光源，应当理解为从任一面元 dS 出发包围在一个立体角内这样的光束的集合。此光束的轴线与 dS 的法线 $\vec{e}_n$ 成一个角度 θ 。

光源的亮度 L ：表征发光面发光强度，并与发光表面特性有关的物理量。单位 cd/m^2

$$L = \frac{d\Phi_v}{dS \cos \theta d\Omega} = \frac{dI}{dS \cos \theta} \quad (4-10)$$

通常扩展光源上每一面元的亮度随方向而变。

朗伯光源（余弦发射体）：扩展光源的发光强度 $dI \propto \cos \theta$ ，从而亮度 L 不随 θ 变化。

理想的漫反射面遵循朗伯定律，称为**朗伯反射体**。

4.8 物镜的聚光本领

物镜的聚光本领：描述物镜聚集光通量能力的物理量，可以用像面的照度来量度。

光学仪器的物镜的入射光瞳面积越大，能够进入物镜的光通量就越多，像的照度也就越强。

1.光源在较近距离时的聚光本领 数值孔径

取一定大小的入射光瞳的光具组，研究光源距离较近时的聚光本领问题， dS 为发光体的一个面元，垂直于工具组主轴，亮度为 L 。光通量 $d\Phi_v$ ，立体角 $d\Omega_1$ ，在与主轴成 u_1 孔径角方向上：

$$d\Phi_v = \int_0^{2\pi} \int_0^u L_{u_1} \sin u_1 \cos u_1 dS du_1 d\varphi$$

对朗伯光源，得物空间里的光通量：

$$d\Phi_v = 2\pi L dS \int_0^u \sin u_1 \cos u_1 du_1 = \pi L \sin^2 u dS \quad (4-11)$$

像空间：

$$d\Phi'_v = \pi L' \sin^2 u' dS' \quad (4-12)$$

亮度、折射率关系：

$$\frac{L'}{L} = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \text{ or } L' = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 L$$

定义新常量 L_0 表示成像的物放置在真空时的亮度：

$$L_0 = \frac{L'}{n'^2} = \frac{L}{n^2}$$

假定光能量在通过整个光具组时完全不被吸收，出射光通量等于入射光通量，则像面的照度 E' 为：

$$E' = \pi L_0 R_{N.A.}^2 \frac{1}{\beta^2} \quad (4-13)$$

dS' 为像面上的面元， β 为横向放大率。

提高聚光本领，不但要求有大的孔径角，还要求物空间内充满折射率较大的透明物质。

数值孔径 $R_{N.A.}$: 孔径角 u 的正弦与透镜和物体之间介质的折射率 n 的乘积 $n \sin u$ 。

2. 显微镜的聚光本领

制造短焦距大孔径的透镜比较困难，因此显微镜物镜的孔径很小，从而限制了光通量。可用近距离物体聚光本领的理论，来研究显微镜的聚光本领。

如左图， O 为物镜最前面的一个透镜，通常是半球形的，边缘为有效光阑。物体通常用载玻片盛装，上面有盖上盖玻片，因此通常来说光要通过一个平玻璃片再经过空气，然后才能进入物镜。这样一方面当入射角达到全反射临界角 i_c 时，或者由于空气将光线向外折而提前触及有效光阑边缘时，就会导致能够透出的光线较少，从而限制了孔径角，降低光通量。

如右图，一个解决方法是用折射率和玻璃相同的油充满空气间隙，一方面能够防止发生全反射，另一方面也可以防止折射光线提前达到有效光阑的边缘。一般会使用折射率为 $n = 1.515$ ，临界角为 $i_c = 41.8^\circ$ 的杉木油来充满这个间隙，这就是**均匀油浸法**，这种显微镜叫做**油镜**。此时进入物镜的光束的孔径角几乎可达 90° ，故可以增加光通量。

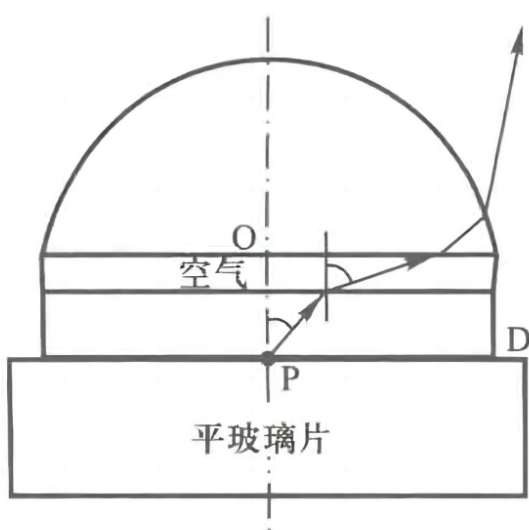


图 4-21 显微镜的聚光本领

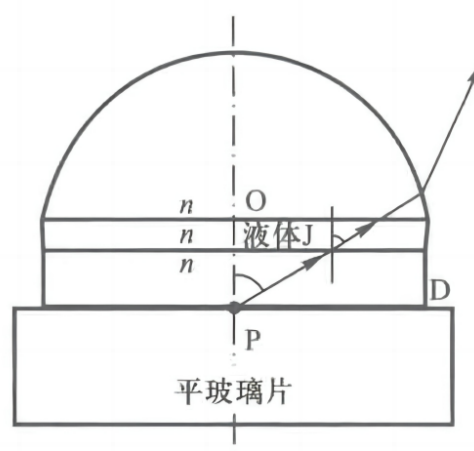


图 4-22 油浸透镜下，
显微镜的聚光本领

使用油浸法时，数值孔径为不用油浸法时的 n 倍。

3. 光源距离较远时的聚光本领 相对孔径

光源距离较远时，使用出射光瞳 $A'B'C'D'$ 对像面元 dS' 所张的孔径角 u' 来研究聚光本领。如图有：

$$\sin u' \approx \frac{d'/2}{x' + (-x'_p)}$$

$$E' = \pi L_0 n'^2 \frac{d'^2}{4(x' - x'_p)^2}$$

$$x' - x'_p = f' \left(\frac{x'}{f'} - \frac{x'_P}{f'} \right) = f'(\beta_P - \beta)$$

出射光瞳 $d' = \beta_P d$ ，则：

$$E' = \frac{\pi L_0 n'^2}{4} \left(\frac{d}{f'} \right)^2 \left(\frac{\beta_P}{\beta_P - \beta} \right)^2 \quad (4-14)$$

相对孔径 $\frac{d}{f'}$ ：入射光瞳的直径与焦距之比。

以上的讨论适用于望远镜。对足够远的物体，横向放大率远小于1，近似认为 $\beta \approx 0$ ，因而：

$$E' = \frac{\pi L_0 n'^2}{4} \left(\frac{d}{f'} \right)^2$$

4.照相机的聚光本领

前面提到过照相机通常加一光圈，此光圈总是作为有效光阑，因此要根据此光阑进行讨论。

相机的入射光瞳和出射光瞳可以认为是大小相等的，照度有以下几种形式：

(1) 一般

$$E' = \frac{\pi L_0}{4} \left(\frac{d}{f'} \right)^2 \left(\frac{1}{1 - \beta} \right)^2 \quad (4-15)$$

(2) 拍摄远物时， $\beta \approx 0$ ：

$$E' = \frac{\pi L_0}{4} \left(\frac{d}{f'} \right)^2 \quad (4-16)$$

(3) 这静物及微距摄影时， $\beta \approx -1$ ：

$$E' = \frac{\pi L_0}{16} \left(\frac{d}{f'} \right)^2 \quad (4-17)$$

近物像的照度比远物像的照度小4倍，会影响拍摄的质量，因此微距摄影是一个值得深入研究的问题。照度影响曝光时间。感光膜灵敏度相同时，照度越强，曝光时间越短。为了保证拍摄近物时曝光时间不会太长，应该将光圈调大。

光圈数 $f = \frac{f'}{d}$ ，即相对孔径的倒数，用于表示照相机的聚光本领。数值越大，相对孔径越小，聚光本领越弱。

4.9 像差概述

1.成完善的像的条件

- (1) 物面上每一个发光点应该呈一个清晰的像点；
- (2) 所有的像点都必须位于同一个平面上，这个平面也必须垂直于光学系统的主轴；
- (3) 各像点的横向放大率都必须是常数；
- (4) 像的各部分应与物有相同的彩色。

影响项：

- (1) (2) ——像的清晰度；
- (2) (3) ——使像变形；
- (4) ——使像出现不正确的彩色而模糊。

2.像差

像差：偏离理想成像的现象。

对近轴物，像差不很显著，可忽略，但限制光通量和容纳物面的大小。彩色问题在近轴时也无法避免。

- 种类：**
- (1) 近轴物宽光束引起的球面像差和彗形象差；
 - (2) 远轴物窄光束引起的像散、像面弯曲和像形畸变。

对单色光而言——**单色像差**；不正确的彩色——**色差**。

3.球差

球差：透镜表面为球面，通过塔径不同环带的光线折射后和主轴交点不重合，不会聚于一个像点而是成一个弥漫的圆斑。

球差大小的量度：光线和主轴最远（或最近）交点与理想像点之间的距离。

相关项：透镜表面曲率半径、折射率、不对称透镜向光源面（一般凸面效果好些）。

垂直于主轴的光屏移动时，从一个物点发出的光线经光学系统后和光屏的交点轨迹是一些圆，照度不均匀（弥漫圆），大小、照度分布随光屏移动变化。弥漫圆的形状是一个有面积较大照度较弱的晕包围的亮点，光屏移动，晕的范围、亮点亮度变化趋势相同，照度与之相反。光屏在某一位置弥漫圆缩到最小，得到明晰圆。

4.10 助视仪器的像分辨本领

1.分辨本领

由于有效光阑和光的衍射的作用，详尽描述物面的细节是不可能的。对夫琅禾费衍射，第一个暗环的衍射角 $\theta_1 = 0.610 \frac{\lambda}{R}$ ，由于光源不相干，总照度是两组明暗条纹的叠加。中心亮斑接近到一定程度，像将无法分辨开。

瑞利判据：总照度分布曲线下凹部分（中心亮斑叠加部分）对应强度不超过每一曲线最大值的74%时，肉眼还能观察到间隔。

一个中央亮斑的最大值部分恰好在另一个的最小值处时（刚好在边缘）刚刚能被分辨。此时发光点对光具组视角：

$$U = \theta_1 = 0.610 \frac{\lambda}{R} \quad (4-18)$$

以上角称为光具组的**分辨极限**，倒数称为**分辨本领**。

2.人眼的分辨本领

瞳孔分辨极限角：

$$U_0 = \frac{0.610 \times 555 \times 10^{-7} \text{cm}}{0.1 \text{cm}} = 3.4 \times 10^{-4} \text{rad} \approx 1'$$

明视距离处： $25U_0 \approx 0.1 \text{mm}$ ，比这更小的就不能分辨了。

对人眼来说，分辨极限角：

$$\theta'_1 = 0.610 \frac{\lambda}{nR} \quad (4-19)$$

即对于折射率为 n 的介质，分辨极限要乘 $\frac{1}{n}$ 。

视网膜上衍射图样中央亮斑的半径：

$$2.2 \text{cm} \times \theta'_1 \approx 5.57 \times 10^{-4} \text{cm}$$

此半径略大于视锥细胞的直径，约与相邻的细胞间的距离相等。

3.望远镜物镜的分辨本领

物镜的孔径越大，分辨效果越好。分辨极限与分辨本领、相对孔径成反比，和波长成正比。

望远镜的分辨极限：物镜焦平面上刚刚能够被分辨出的两个像点之间的距离表示

$$\Delta y' = f' \theta_1 = 1.220 \frac{\lambda}{d/f'} \quad (4-20)$$

4.显微镜物镜的分辨本领

接收平行光——用夫琅禾费理论解释

f' 用物镜像距 s' 代替：

$$\Delta y' = 1.220 \frac{\lambda}{d} s' \quad (4-21)$$

制造显微镜时，使共轭点遵从**阿贝正弦条件**：

$$n \Delta y \sin u = n' \Delta y' \sin u' \quad (4-22)$$

即：

$$\Delta y = 0.610 \frac{\lambda}{n \sin u} \quad (4-23)$$

4.11 分光仪器的色分辨本领

主要问题在于用分光仪器观察色散和衍射引起的光谱结构。

1. 棱镜光谱仪

棱镜光谱的成因：每一条谱线都是线光源的像，分光是偏向角不同导致。

角色散率：

$$D = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{d\theta}{d\lambda}$$

三棱镜折射棱角 A ，最小偏向角 θ_0 ，折射率：

$$n = \frac{\sin \frac{\theta_0 + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad (4-24)$$

由推导得：

角色散率：

$$D = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{A}{2}}} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \quad (4-25)$$

角间隔：

$$\Delta\theta = D\Delta\lambda = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{A}{2}}} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \cdot \Delta\lambda \quad (4-26)$$

缝宽 b ：

$$\Delta\theta = \theta_1 = \frac{\lambda}{b} \quad (4-27)$$

棱镜底面宽度 δ ：

$$\delta = \frac{2b \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{A}{2}}} \quad (4-28)$$

色分辨本领：

$$P = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \delta \frac{dn}{d\lambda} \quad (4-29)$$

光谱仪的线色散率：

$$L = Df' = \frac{d\theta}{d\lambda} f' = \frac{\delta}{b} f' \frac{dn}{d\lambda} \quad (4-30)$$

材料的色散率与波长有关，光谱仪的线色散率在不同的波段不同，在说明书中一般给出几个不同波段的线色散率。

2.光栅光谱仪

角色散率：

$$D = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{j}{d \cos \theta} \text{ or } \Delta\theta = \frac{j}{d \cos \theta} \Delta\lambda \quad (4-31)$$

线色散率：

$$L = f' \frac{d\theta}{d\lambda} = f' \frac{j}{d \cos \theta} \quad (4-32)$$

色分辨本领：

$$P = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = jN \quad (4-33)$$

第5章 光的偏振

5.1 自然光和偏振光

1.光的偏振性

纵波：振动方向与传播方向平行。

横波：振动方向与传播方向垂直。

取传播方向为对称轴，如果振动相对这个轴对称，则称**有对称性**。纵波可以想象成一系列以此轴为对称轴的圆面的序列（用轴串起来），则**纵波一定有对称性**。只有一种成分的横波不具有这种性质，故**不对称**，称为**偏振**。**偏振性是横波区别于纵波的一个最明显的标志**。

光传播时主要起作用的是电矢量 $\vec{E}$ ，称为**光矢量**，其振动称为**光振动**。

线偏振光：在传播过程中电矢量的振动只限于某一确定平面内，在与传播方向垂直的平面上的投影是一条直线的光。

偏振光的振动面：电矢量和光的传播方向所构成的平面。

2.自然光与偏振光

对于**自然光**来说，如第一章所讨论过的，它是大量不同相位、不同波长、不同长度的波列，偏振方向自然也是不同的。因此偏振方向也包含了在任一方向上的成分，且平均分布。在观测时间内，由于微观发光时间很短，实际接收到的是大量的偏振波列，且波列之间相位彼此无关联，电矢量轴对称分布。

自然光的特点：在光的传播方向上的任意一个场点，电矢量既有空间分布的均匀性，又有时间分布的均匀性。

自然光可以看成是两个振幅相同，振动相互垂直的非相干的线偏振光的叠加。由于这两种成分无固定的相位关系，故无法相关。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_x &= \sum_i \mathbf{a}_{ix} \\ \mathbf{A}_y &= \sum_i \mathbf{a}_{iy} \\ A_x &= A_y \end{aligned}$$

自然光强度 I_0 ，有：

$$I_0 = A_x^2 + A_y^2 = I_x + I_y$$

则：

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} \quad (5-1)$$

5.2 线偏振光与部分偏振光

起偏器：能以某种方式选择自然光中的一束线偏振光，摒弃另一束线偏振光的光学元件。

线偏振光的电矢量表达式：

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y = (A_{0x} \pm A_{0y} \mathbf{e}_y) \cos(\omega t - kz) \quad (5-2)$$

取正时如下面左图，取负时按下面右图。

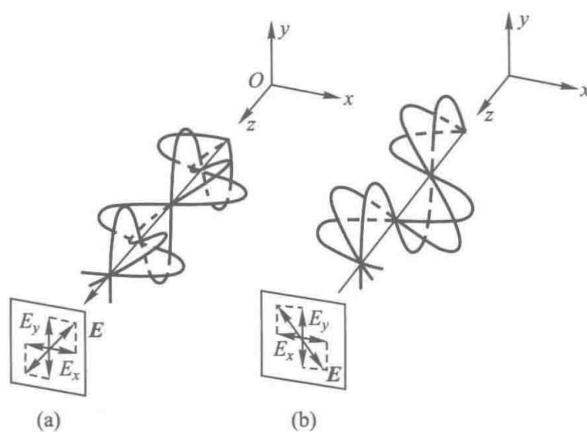


图 5-4 线偏振光的两种分解法

1. 二向色性线偏振光

二向色性：某些晶体对振动方向不同的电矢量具有选择吸收的性质，吸收一个方向上的电矢量，让垂直方向几乎都透过。能透过电矢量的方向称为**透振方向**。

起偏器：用来产生线偏振光。（偏振片 P_1 ）

检偏器：用来检验线偏振光。（偏振片 P_2 ）

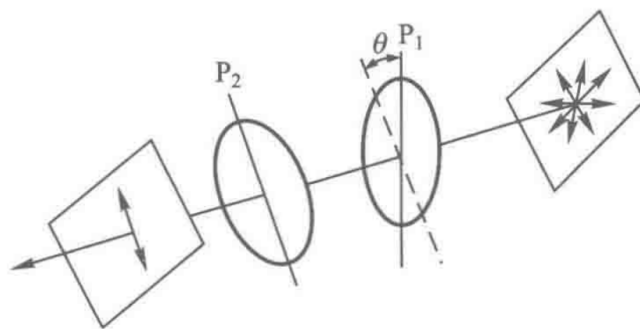


图 5-5 起偏器与检偏器

透射光强：

$$I_{\theta} = A^2 \cos^2 \theta = I \cos^2 \theta \quad (5-3)$$

马吕斯定律：线偏振光通过检偏器后的透射光强度按上式随角 θ 变化。

无吸收的理想偏振片后，强度应减为原来的一半。

2.反射光的偏振态

反射和折射时，反射光和折射光的传播方向由反射和折射定律决定。光的振动取向即偏振态，根据光的电磁理论，由电磁场的边界条件来决定。

由菲涅耳定律(1-36)(1-37)式知：

$$\frac{A'_{p1}}{A_{p1}} = \frac{A'_{s1}}{A_{s1}} \frac{\cos(i_1 + i_2)}{\cos(i_1 - i_2)} \quad (5-4)$$

$i_1 = 0^\circ$ 或 $i_2 = 90^\circ$ 时：

$$\frac{A'_{p1}}{A_{p1}} = \frac{A'_{s1}}{A_{s1}}$$

知道 $A_{p1} = A_{s1}$ ，则对于反射光， $A'_{p1} = A'_{s1}$ ，此时得到的仍是自然光。除以上状况外，有不等式

$$|\cos(i_1 + i_2)| < \cos(i_1 - i_2) \implies \frac{A'_{p1}}{A_{p1}} < \frac{A'_{s1}}{A_{s1}}$$

说明：反射光中电矢量的平行分量值总是小于电矢量的垂直分量值。从内部结构来看，这两个分量是方向不同、振幅大小不同的，大量偏振光的电矢量在这两个方向上投影的矢量仍然不相干，不能合成为一个矢量，为**部分偏振光**。

边值关系：

	电场	磁场
平行平面	$\vec{n} \times (\vec{E}_{\tau 2} - \vec{E}_{\tau 1}) = 0$	$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$
垂直平面	$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n} = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$	$\vec{i}_0 = \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)$

从电矢量规律能看出，平行平面上切向会失去切向上的能量（等于0），而垂直平面总会保留这部分能量。

I_{max} 、 I_{min} 是在某一个方向上的最大值或最小值，用于度量偏振程度的量为**偏振度**：

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (5-5)$$

自然光是偏振度等于0的光，也称非偏振光。

反射光偏振化：由菲涅耳公式，使

$$i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}, \frac{A'_{p1}}{A_{p1}} = 0$$

则电矢量的平行分量完全不能反射，反射光只剩下垂直分量。折射角 i_2 ，则：

$$\tan i_{10} = \frac{\sin i_{10}}{\cos i_{10}} = \frac{\sin i_{10}}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (5-6)$$

i_{10} 称为**布儒斯特角**，此关系称为**布儒斯特定律**。

3.透射光的偏振态

自然光以任意入射角入射时，折射后从介质透射出来的光总是部分偏振的。只是在以布儒斯特角入射时，电矢量的平行分量完全透过，使偏振度最高。对于经过介质平行两个平面透射的情况：

由 $i_{10} + i_2 = \frac{\pi}{2}$ ，第一次透射【角标(1)】

$$A_{p2}^{(1)} = A_{p1} \frac{2 \cos i_{10} \sin i_2}{\sin(i_{10} + i_2) \cos(i_{10} - i_2)} = A_{p1} \tan i_2 \quad (5-7)$$

第二次透射【角标(2)】， $i'_1 = i_2$ ， $i'_2 = i_{10}$ ， $i_{10} + i_2 = \frac{\pi}{2}$

$$A_{p2}^{(2)} = A_{p2}^{(1)} \frac{2 \sin i'_2 \cos i'_1}{\sin(i'_1 + i'_2) \cos(i'_1 - i'_2)} = A_{p2}^{(1)} \cot i_2 \quad (5-8)$$

由两式合并：

$$A_{p2}^{(2)} = A_{p1} \tan i_2 \cot i_2 = A_{p1} \quad (5-9)$$

即在光以布儒斯特角入射到一片透明介质且没有吸收的情况下，透射光中电矢量的平行分量等于入射光中电矢量的平行分量，电矢量的平行分量经过透射后保持不变，即平行分量完全透射。

对垂直分量：

$$A_{s2}^{(1)} = 2A_{s1} \sin^2 i_2 \quad (5-10)$$

$$A_{s2}^{(2)} = 4A_{s1} \sin^2 i_2 \cos^2 i_2 = A_{s1} \sin^2 2i_2 \quad (5-11)$$

以上说明垂直分量不能完全消除，因此自然光入射的情况下，即使以布儒斯特角入射，从一片介质透射出来的光仍是部分偏振光。因此需要采用多次折射的方法得到线偏振光。此种折射光经过 $2n$ 次折射后：

$$\begin{aligned} A_{p2}^{(2n)} &= A_{p1} \\ A_{s2}^{(2n)} &= A_{s1} \sin^{2n} 2i_2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A_{s2}^{(2n)} &= 0 \implies A^{(2n)} = A_{p1} \end{aligned}$$

此时透射光几乎是偏振光，电矢量平行于入射面。

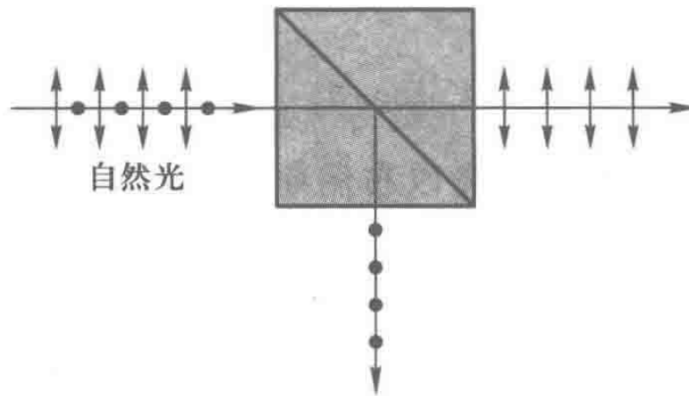


图 5-10 薄膜偏振分光棱镜

薄膜偏振分光棱镜：利用多层膜提高反射光的能量利用率和透射光的偏振度，将两部分偏振光充分利用起来。

在图中对角线上装上多层透射膜，分成如图所示的两种成分。布儒斯特角接近 90° 。

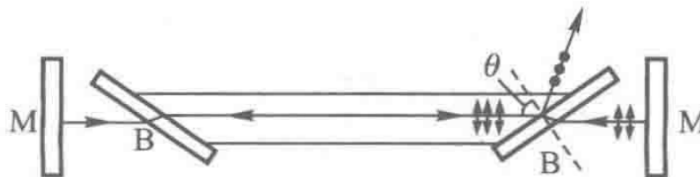


图 5-11 外腔式气体激光器

外腔式气体激光器：光线以布儒斯特角照射到窗B上。

5.3 光通过单轴晶体的双折射现象

1. 双折射现象

双折射：一束光在各向异性介质中发生折射时，折射光分成两束，并各自沿着略微不同的方向传播。入射光束足够细、晶体足够厚时，透射光可以完全分开。

寻常光 (o光)：仍遵循折射定律折射的光。

非常光 (e光)： 偏离原来的方向、不遵循折射定律的光。

反映：光在晶体内各个方向的传播速度不同，只有在双折射晶体内部才有意义。

入射角改变时，e光的入射角正弦和折射角正弦不是常数，还受晶体的取向影响，一般也不在入射面内。

常见的双折射晶体：方解石、石英等，只有立方系不发生双折射。

2.光轴、主平面与主截面

晶体的**光轴**：平行于双折射晶体中不发生双折射的方向的任何直线。即入射光沿光轴方向时，不发生双折射。**光轴是方向而限于某一条特殊的直线。**

只有一个光轴——单轴晶体；有两个光轴——双轴晶体。

主平面：光轴和一条光线确定的平面（与光线对应，分o光主平面和e光主平面）。

o光的振动面垂直于自己的主平面；e光的振动面平行于自己的主平面。这两个主平面一般不平行但夹角很小，二者振动面几乎相互垂直。

主截面：包含晶体光轴和界面法线的平面。光线的入射面和主截面重合时，o光和e光都在入射面内，主平面互相重合，也与主截面及入射面重合。

3.o光和e光的相对光强

自然光——二者振幅相等。

线偏振光——二者振幅不一定相等，随晶体方向改变。

振动面和主截面夹角为 θ 时，振幅：

$$A_o = A \sin \theta$$

$$A_e = A \cos \theta$$

光强：

$$I_o = n_o A_o^2 = n_o A^2 \sin^2 \theta$$

$$I_e = n_e(\alpha) A_e^2 = n_e(\alpha) A^2 \cos^2 \theta$$

相对光强：

$$\frac{I_o}{I_e} = \frac{n_o}{n_e(\alpha)} \tan^2 \theta \quad (5-12)$$

出射之后：

$$\frac{I_o}{I_e} = \tan^2 \theta$$

有以下的几种情况：

(1) $\theta = 90^\circ$, $I_o = I$, $I_e = 0$;

(2) $\theta = 0^\circ$, $I_o = 0$, $I_e = I$;

(3) 扩大入射光束是两束光重叠:

$$I_o + I_e = I(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = I$$

不论晶体如何转动, 重合部分光强不变。

5.4 光在晶体中的波面

各向异性晶体在三个平动自由度上的振动各有一个固有频率 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 , 根据**光的电磁学说**, 光波通过介质时会使带电粒子做受迫振动, 振动与固有频率同向时相位与此方向振动频率相关。这种振动发出频率与入射光频率相同的次波, 次波叠加形成折射波, 导致不同成分具有不同相位传播速度。

单轴晶体三个固有频率中有两个相同, 平行光轴 ω_1 , 垂直光轴 ω_2 , 由C点发出的光线:

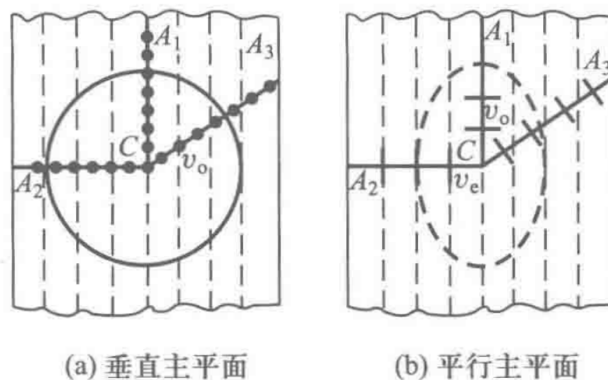


图 5-14 光在晶体中的波面

(a)垂直主平面时是o光, 任意方向上都与 ω_2 相关, 各方向相位相同, 波面(同相位面)为球面。

(b)平行主平面时是e光, CA_2 为平行光轴方向, 则 CA_1 方向与 ω_2 相关, 速度为 v_o ; CA_2 方向与 ω_1 相关, 速度为 v_e ; CA_3 介于二者之间。得到的波面是旋转椭球面。对于截面不大的e光来说, 传播方向不一定垂直于波面。

不发生双折射的条件: 两波面相切。

两类单轴晶体: 旋转椭球面在球面之内, e光速度在除光轴方向之外都比o光小——正晶体; 旋转椭球面在球面之外, e光速度在除光轴方向之外都比o光大——负晶体。

5.5 光在晶体内的传播方向

1. 单轴晶体内o光和e光的传播方向

实际光束射入时，桌面上一点同时发出旋转椭球面或球面的次波。可用波面的特点和惠更斯作图法确定o光和e光的传播方向。

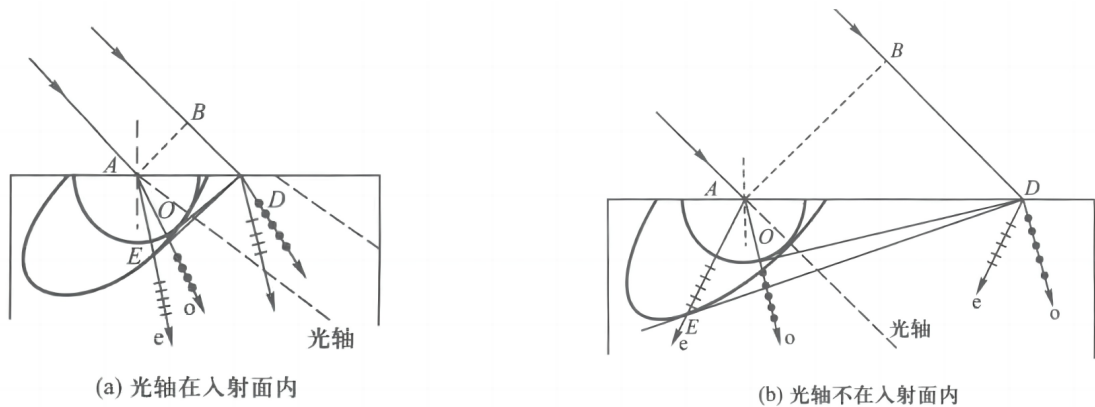


图 5-16 晶体中 o 光和 e 光的波面

(a) **光轴在入射面内**。以A为球心作一半径为 $v_o t$ 的半球面、半短轴为 $v_o t$ 的半椭球面、半长轴为 $v_e t$ 的半椭球面，使椭球的半短轴沿光轴方向，DO和DE分别是球面和椭球面的切面，也是所有次波波面的包络面，分别代表o光和e光的折射波面。因此两束光分别沿对应的方向传播，即沿AO和AE传播。

光轴在入射面→两个主平面、主截面、入射面都重合→e光在图面内振动，o光在图面垂直方向振动

(b) **光轴不在入射面内**。波面DE垂直入射面但切点E和e光都不在入射面内，两个主平面不再重合。若光轴在入射面内且与晶体表面呈一定角度，可能会出现e光与入射光线在表面法线同一侧的情况。

实际常用的晶体

常制成光轴与晶体表面平行或垂直。当光束垂直入射：

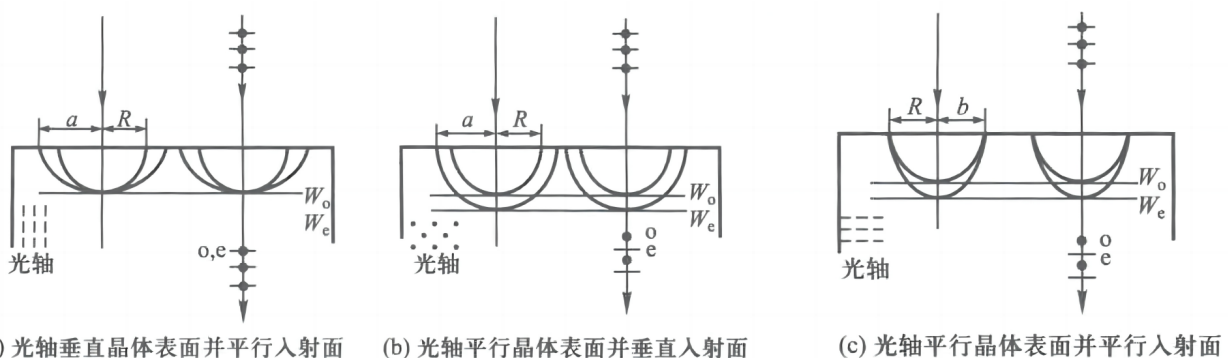


图 5-17 晶体中 o 光和 e 光的波面

(a) 不分开，传播速度也相等；

(b) 光轴就是旋转椭球面的转轴，旋转椭球面和入射面的交线也是圆。对负晶体，半径等于半长轴而大于o光波面的半径 R ；

(c) 光轴就是旋转椭球面的转轴，旋转椭球面和入射面的交线也是圆。对负晶体，半短轴等于o光波面的半径 R 。

(b) (c) 中o光和e光不分开，但是由于速度不相等，仍有相位差，仍然是两束光并有双折射存在。两者代表同一组球面和球面的两个不同的截面。

此三种情况下o光和e光的主平面以及晶体的主截面均重合为一。

2.单轴晶体的主折射率

两个主折射率：

(1) o光的折射率为 n_o ，与方向无关，

$$n_o = \frac{c}{v_o}$$

(2) e光的折射率为 n_e ，与方向有密切关系。一般不遵守折射定律也无折射率可言，但当e光沿垂直于光轴方向传播时，入射角 i_1 与折射角 i_{2e} 的关系为：

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_{2e}} = \frac{c}{v_e} \quad (5-13)$$

其中 v_e 是负晶体中e光的速度最大值，此比值为常数，在形式上类似折射定律，因此此情景e光有**主折射率**为：

$$n_e = \frac{c}{v_e}$$

对一般晶体来说，两种主折射率差别不大。

5.6 偏振器件

双折射晶体制造的偏振器件。双折射晶体特点：（1）两束光都是完全的线偏振光——制成双折射棱镜；（2）两束光传播速度一般不一样——制成波片，改变偏振态。

1.尼科耳棱镜

精密要求较高的仪器常用。

原理：利用双折射分出o光和e光，利用全反射吸收o光，只允许e光出射。

制作：取方解石晶体（ $n_o = 1.658$ ， $n_e = 1.486$ ），将晶体本身的 71° 角磨成 68° ，沿图中双线剖成两块，用加拿大树胶（ $n = 1.550$ ）黏合。

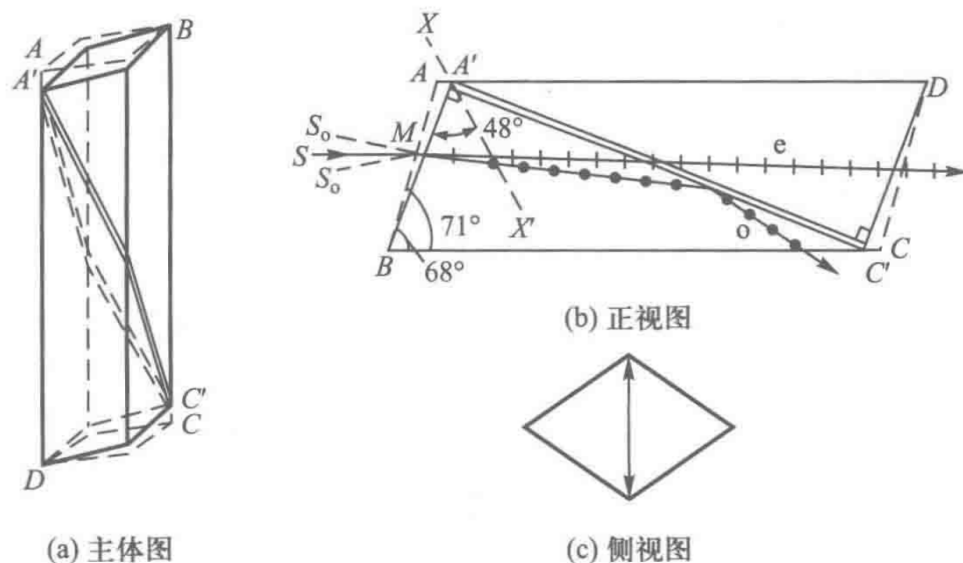


图 5-19 尼科耳棱镜结构示意图

如图(b)为一个主截面，光从 SM 射入，分为o光和e光。其中o光的临界角 $i_c = 70^\circ$ ，以入射角 $i_e = 76^\circ$ 射到树胶层，发生全反射并被侧面的涂层吸收。e光则是由光疏介质射入光密介质，无全反射，从而出射。

尼科耳棱镜得到的是与e光相应的线偏振光，振动方向平行于主截面且平行于尼科耳棱镜的横截面的短对角线。

沿上面的 S_oM 入射：入射角可能小于临界角，不发生全反射；沿下面的 S_oM 入射：e光与光轴夹角变小，折射率变化，可能发生全反射。由切削角度得到上下相等的极限角约为 14° 。

作用：起偏器或检偏器。入射光与主截面成 θ 角入射，得到光强：

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (5-14)$$

取两个尼科耳棱镜，主截面夹角 θ ，前一个为起偏器，后一个为检偏器：

$\theta = 0$ ，偏振光完全通过，称为**平行尼科耳棱镜**；

$\theta = 90^\circ$ ，偏振光完全不能通过，称为**正交尼科耳棱镜**。

使用注意：加拿大树胶吸收紫外线，此波段不可使用。激光是良好入射光源，但是会破坏粘合剂。可以使用由空气代替树胶的格兰-傅科棱镜，o光和e光的临界角分别为 $37^\circ 14'$ 和 $42^\circ 23'$ 。

2. 沃拉斯顿棱镜

能产生两束彼此分开、振动垂直的线偏振光。

由两个直角棱镜构成，垂直入射第一个棱镜可以得到前述o光和e光不分开的效果，射入第二个棱镜时，o光变e光，e光变o光，相对折射率对应产生。再由于方解石是负晶体，故得到效果：o光靠近界面法线（折射定律），e光远离法线（ $n_o > n_e$ ）。棱镜顶角 β 不太大时，二者在右侧界面上以几乎相等的角度分开。光的夹角近似为：

$$\varphi = 2 \arcsin [(n_o - n_e) \tan \beta] \quad (5-15)$$

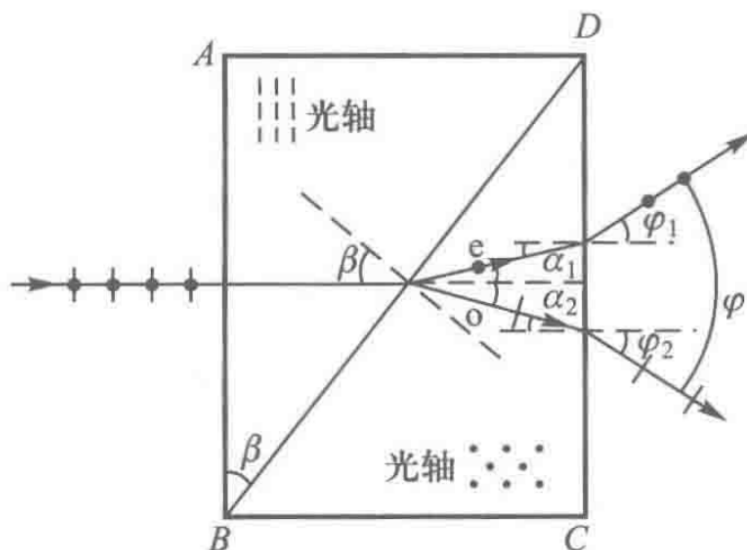


图 5-20 沃拉斯顿棱镜示意图

3.波片

波片：表面平行的单轴晶体，光轴与晶体表面平行时，o光与e光沿同一方向传播。

入射时分解出的e光和o光的相位是相等的，在波片内由于传播速度不同而产生相位差。两振动为：

$$E_e = A_e \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda_e} \right) \right]$$

$$E_o = A_o \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda_o} \right) \right]$$

相位差为：

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d \quad (5-16)$$

d 为波片厚度。

1/4波片：相位差 $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ ，厚度满足 $(n_o - n_e)d = \pm\frac{\lambda}{4}$ ，实际制作厚度 $(n_o - n_e)d = \pm(2j + 1)\frac{\lambda}{4}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$)，对应相位差 $\pm(2j + 1)\frac{\pi}{2}$ 。可将圆偏振光和椭圆偏振光转换成线偏振光。

半波片：厚度 $(n_o - n_e)d = \pm(2j + 1)\frac{\lambda}{2}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$)，对应相位差 $\pm(2j + 1)\pi$ 。线偏振光垂直入射后仍为线偏振光，振动面与主截面夹角为 θ 时，偏振方向转过 2θ 角。

全波片：厚度 $(n_o - n_e)d = \pm 2j\frac{\lambda}{2}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$)，对应相位差 $\pm 2j\pi$ 。不改变光的状态。

5.7 椭圆偏振光和圆偏振光

1. 描述

椭圆偏振光的产生：由两列频率相同，振动方向相互垂直，且沿同一方向传播的线偏振光叠加得到。

光波沿 z 方向传播的时：

$$\begin{aligned} E_x &= A_x \cos(\omega t - kz) \\ E_y &= A_y \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi) \end{aligned} \quad (5-17)$$

合成波表达式：

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y = A_x \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + A_y \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi) \vec{e}_y \quad (5-18)$$

得到的椭圆方程为：

$$\frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - 2\left(\frac{E_x}{A_x}\right)\left(\frac{E_y}{A_y}\right) \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi \quad (5-19)$$

E_x 和 E_y 的值总是在 $\pm A_x$ 和 $\pm A_y$ 之间变化，电矢量端点的轨迹与以 $E_x = \pm A_x$ 和 $E_y = \pm A_y$ 为界的矩形框相内切。主轴与 x 轴夹 α 角， α 值的求法：

$$\tan 2\alpha = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 - A_y^2} \cos \Delta\varphi \quad (5-20)$$

相位差 $\Delta\varphi$ 表示 E_y 的振动超前于 E_x 的相位。

椭圆偏振光的方向：根据(5-18)的电矢量端点旋向（旋转矢量法）判断，顺时针——右旋椭圆偏振光——右手螺旋；逆时针——左旋椭圆偏振光——左手螺旋（均可联合判断）。相位差 $\Delta\varphi = (2j+1)\frac{\pi}{2}$ ，得到正椭圆偏振光。

圆偏振光：特例，令 $A_x = A_y = A_0$ ， $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ ，电矢量端点轨迹是圆，表达式

$$\vec{E} = A[\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x \mp \sin(\omega t - kz)\vec{e}_y]$$

第二项取正号为左旋，取负号为右旋。

2. 获得

方法：使一束线偏振光通过波片。

原理：线偏振光垂直入射在玻片上时除。电矢量振动方向与波片光轴平行或垂直外，分解出来的o光和e光正好满足频率相同，振动方向互相垂直、相位相同并且同方向传播的条件。由于o光和e光传播速度不同，出射时具有恒定的附加相位差，故**一般会形成椭圆偏振光**。

电矢量：

$$\vec{E} = A_x \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + A_y \cos\left(\omega t - kz \pm \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y$$

负晶体、光轴沿y轴、振动在第一、第三象限、取正——右旋正椭圆偏振光；线偏振光振动方向不变、波片光轴沿y轴、取负——左旋正椭圆偏振光。

1/4波片的特殊情况：电矢量和光轴成 45° 角，得到圆偏振光。厚度 $d = (2j + 1) \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)}$ ，此时两种光要引入 $(j + \frac{1}{2})$ 的相位差，合成波为：

$$\vec{E} = A \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + A \cos\left(\omega t - kz + \left(j + \frac{1}{2}\right)\pi\right) \vec{e}_y$$

$j = 0, 2, 4, \dots$ 时，出射光为右旋圆偏振光； $j = 1, 3, 5, \dots$ 时，出射光为左旋圆偏振光。

3.自然光的改造

自然光中任一线偏振光成分经过波片后都产生一椭圆偏振光，大量的椭圆偏振光合成为自然光。这些椭圆偏振光是无规分布的，相位关系不固定，宏观上轴对称分布。

转化为椭圆偏振光：通过起偏器，然后垂直入射到波片上，即通过**椭圆偏振器**。

转化为圆偏振光：经过**圆偏振器**，即与光轴成 45° 的一个起偏器和一块1/4波片的串接组合。

可以把线偏振光转换成椭圆或圆偏振光，但不能把非偏振光转化成偏振光。

5.8 偏振态的实验检验

1.线偏振光的检验

消光：偏振片由透射光强度最大的角度转过 90° 后，透射光的强度变为0。

椭圆偏振光入射：当偏振片由透射强度最大角度转过 90° 后，透射强度最小，但不被消光。

圆偏振光入射：偏振片无论如何转动，透射强度都不变，与自然光相同。

2.圆偏振光和椭圆偏振光的检验

解决方案：在偏振片前放1块1/4波片，将圆偏振光和椭圆偏振光转换成线偏振光，再转动偏振片。

(1) **区分圆偏振片和自然光：**如果转动偏振片出现两次消光，是圆偏振光；强度不变，是自然光。

(2) **区分部分偏振光和椭圆偏振光：**用偏振片观察，光强随转动有变化但无消光。将偏振片停留在透射光强度最大的位置，然后插入1/4波片使光轴与投射方向平行，则椭圆偏振光转变成线偏振光。椭圆偏振光本身有相位差 $\Delta\varphi$ 。经过1/4波片又产生了相位差 $\Delta\varphi' = \pm\pi/2$ ，总相位差为 $\Delta\varphi + \Delta\varphi' = 0 \text{ or } \pi$ 所以最后仍合成线偏振光。**如果出现两次消光，就是椭圆偏振光；不出现消光，就是部分偏振光。**

3.补偿器

以上方法检验的问题：难以达到使1/4波片的光轴严格的平行于椭圆的主轴的条件。

解决方案：采用补偿器，另行设法引进可以任意变更的相位差 $\Delta\varphi'$ 作为补偿，使总和等于0或 π 。

(1) **巴俾涅补偿器：**第一晶劈内的o光和e光进入第二晶劈后交换性质，只有当光通过两晶劈厚度相同的部分时，两束光才不发生任何相位差。厚度分别为 d_1 和 d_2 时，相位差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)(d_1 - d_2) \quad (5-21)$$

让光通过补偿器不同的地方，就能得到任意的相位差，但必须用极窄的光束。

(2) **索列尔补偿器：**将巴俾涅补偿器的入射光线固定，只移动上面一个晶劈。这样下面的厚度不变，上面的厚度可以改变，故可以得到任意的相位差，而不要求光束极窄。

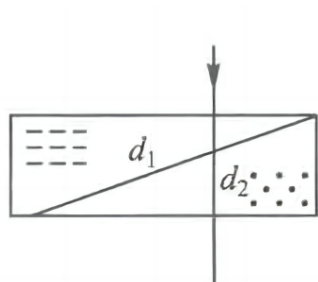


图 5-25 巴俾涅
补偿器示意图

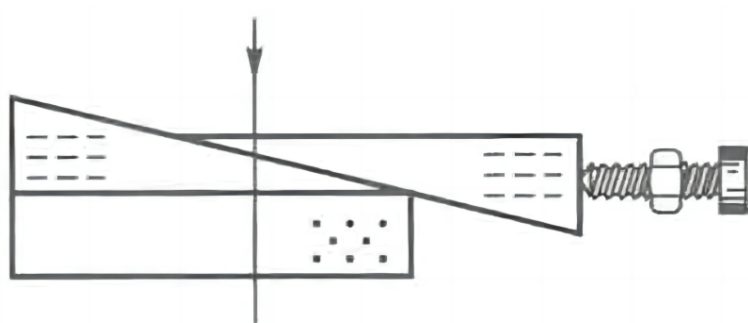


图 5-26 索列尔补偿器示意图

补偿器和波片都是相位延迟器，与移相器的作用类似。

5.9 偏振光的干涉

1.偏振光干涉的实验装置及原理

条件：频率相同、振动方向基本相同、有恒定相位差

装置：在两块共轴的偏振片之间放一块厚度为 d 的波片，光轴沿 y 轴。波片起分解光束和延迟相位的作用。

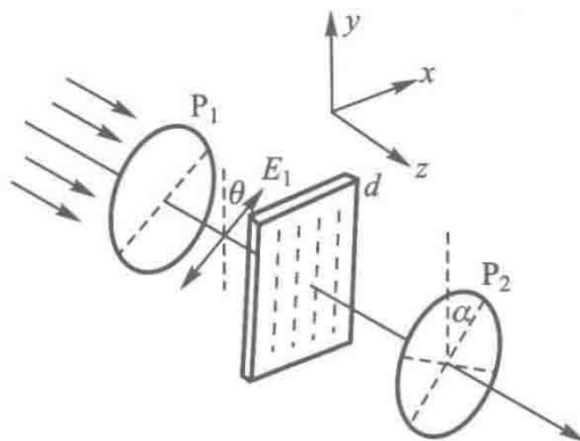


图 5-27 偏振光干涉装置示意图

原理：

(1) 偏振片 P_1 将自然光转换为偏振光，设振幅为 A_1 。

(2) 经过波片，光束发生分解，振幅为：

$$A_o = A_1 \sin \theta$$

$$A_e = A_1 \cos \theta$$

同时波片提供一个相位差 $\Delta\varphi'$ ，由波片及 P_2 相对于 P_1 的取向决定：

1°. 波片引入相位差：

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$$

2°. 是否引入附加相位差：两个透振方向在同一象限内（左图），不需要引入；否则（右图）引入大小为 π 的附加相位差（即 $\Delta\varphi' = \Delta\varphi + \pi$ ）。象限为上图的 P_1 和 P_2 在 xy 平面的投影。

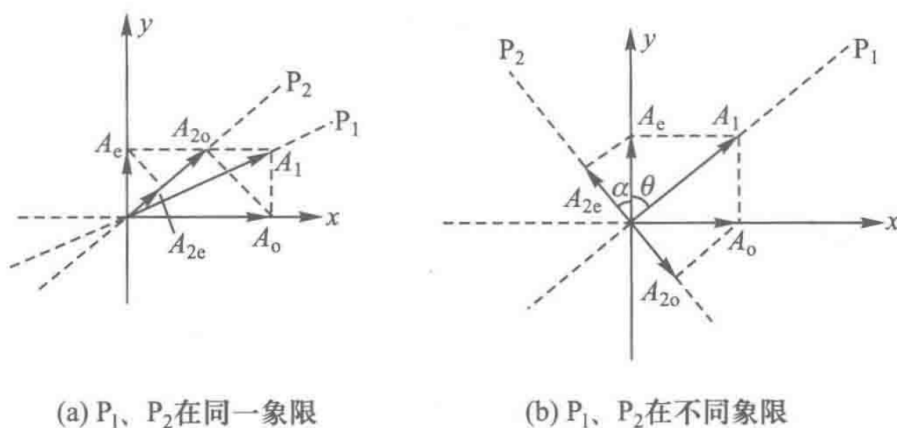


图 5-28 偏振光干涉的相位分析

总相位差

$$\Delta\varphi' = \Delta\varphi + \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \quad (5-22)$$

(3) 光束经过偏振片 P_2 , 得:

$$\begin{aligned} A_{2o} &= A_o \sin \alpha = A_1 \sin \theta \sin \alpha \\ A_{2e} &= A_e \cos \alpha = A_1 \cos \theta \cos \alpha \end{aligned} \quad (5-23)$$

合强度

$$\begin{aligned} I &= A^2 = A_{2o}^2 + A_{2e}^2 + 2A_{2o}A_{2e} \cos \Delta\varphi' \\ &= A_1^2 [\cos^2(\alpha - \theta) - \sin 2\theta \sin 2\alpha \sin^2 \frac{\Delta\varphi'}{2}] \end{aligned} \quad (5-24)$$

1°. 偏振片透振方向相互平行时, $\alpha = \theta$, $\Delta\varphi' = \Delta\varphi$, 则

$$I_{//} = A_1^2 [1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}] \quad (5-25)$$

再令 $\theta = 45^\circ$, 有:

$$I_{//} = A_1^2 [1 - \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}] = \frac{A_1^2}{2} [1 + \cos \Delta\varphi] \quad (5-26)$$

2°. 偏振片透振方向相互垂直时, $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$, $\Delta\varphi' = \Delta\varphi$, 则

$$\begin{aligned} A_{2o} &= A_1 \sin \theta \cos \theta \\ A_{2e} &= A_1 \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (5-27)$$

合强度

$$I_{\perp} = 2A_1^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta (1 + \cos \Delta\varphi') = A_1^2 \sin^2 2\theta \cos^2 \frac{\Delta\varphi'}{2}$$

把 $\Delta\varphi' = \Delta\varphi + \pi$ 代入:

$$I_{\perp} = A_1^2 \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \quad (5-28)$$

令 $\theta = 45^\circ$, 得

$$I_{\perp} = \frac{A_1^2}{2} (1 - \cos \Delta\varphi) \quad (5-29)$$

(4) 产生干涉条纹的方法: 插入尖劈形波片。

1°. 偏振片 P_1 和 P_2 正交:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d = \begin{cases} 2j\pi, & \text{暗条纹} \\ (2j+1)\pi, & \text{亮条纹} \end{cases} (j = 1, 2, 3, \dots)$$

2°. 偏振片平行时让白光通过装置, 由于各种波长光的干涉条纹不一致。在暗纹的地方会显示出它的互补色, 从而出现彩色条纹。

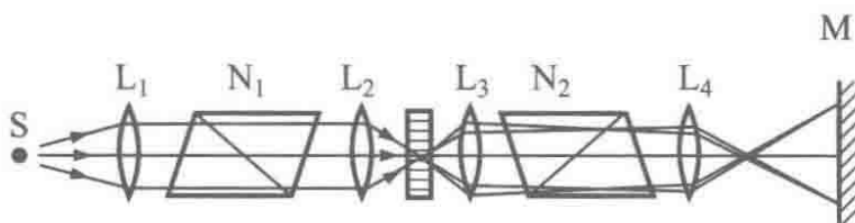
使用单色光时, $n_o - n_e$ 的值在可见光波段变化可忽略。

显色偏振 (色偏振) : 偏振光干涉时出现彩色的现象, 一般使用的光源是白光。

用白光照射时, 由于各种波长的光的干涉条件不能同时满足, 在同一处有不同程度的加强或减弱, 混合起来就会出现彩色, 与波片的厚度相关。转动偏振片 P_2 时彩色会跟着变化。把正交时出现的混合彩色和平行时出现的混合起来, 就重新恢复为和入射光一样的白色。

互补色: 任何两种彩色, 如果混合起来能够成为白色, 则相互为互补色。

3. 会聚的线偏振光的干涉



(a) 装置示意图

按如图装置可以发生干涉, 在光屏 M 上出现透射主轴为中心的明暗相间的同心圆环, 以及 N_2 的主截面平行及垂直与 N_1 主界面时的暗十字形。 N_1 和 N_2 是尼科尔透镜。

非会聚情况下, 对于同一入射角 i_1 , o光和e光折射角 $i_{2o} \neq i_{2e}$, 相位差为:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \left(\frac{n_o}{\cos i_{2o}} - \frac{n'_e}{\cos i_{2e}} \right)$$

其中 n'_e 是此方向上e光的折射率。一般所用会聚光束的顶角不大, 故可认为近似不变, 且与 n_e 相差不大。这个方法主要用来检验折射率差值很小的晶体, 在上式中可以近似的认为两个折射角相等, 用 i_2 来表示。近似得到:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{\cos i_2} (n_o - n_e) = \begin{cases} 2j\pi, & \text{同心暗环} \\ (2j+1)\pi, & \text{同心亮环} \end{cases} \quad (5-30)$$

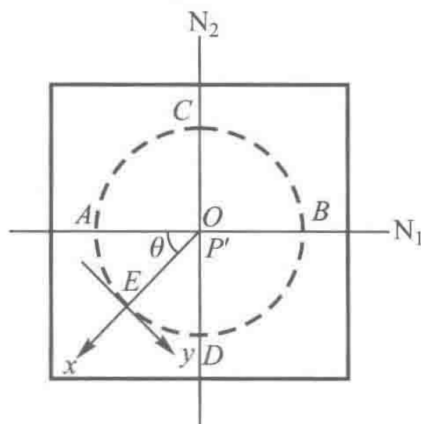


图 5-31 波片的后表面

如图是波片的后表面，光到达这表面上时，在一个圆周上各点的折射角都相等，因此折射出来的光的相位差也都相等，得到的光是同心圆环。 $P'E$ 是折射光线的主截面和玻片表面的交线，是e光的振动面（注意光矢量的振动方向并不沿着此方向，因为光线不垂直于表面）。o光的振动面沿 x 轴。

5.10 场致双折射现象及其应用

1. 应力光学效应——光弹性效应

光弹性效应：原本各向同性、不产生双折射现象的非晶体在应力场中转化为各向异性、显示出双折射性质的现象。也称为**应力双折射**或**机械双折射**。

原理：各向同性介质在某一方向受压力或拉力作用时，在此方向形成光轴。在某一方向应力 σ ，介质的材料系数 C ，有规律：

$$n_o - n_e = C\sigma$$

光程差

$$\delta = (n_o - n_e)d = C\sigma d$$

相位差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d = \frac{2\pi}{\lambda}C\sigma d$$

这两束光经形变介质后都成为振动方向平行于偏振器起振方向的线偏振光，因此能够通过检偏器；同时也满足干涉条件，能产生干涉。应力分布决定干涉条纹的分布情况，应力集中处密集，应力分散处稀疏。

应用：研究应力分布、光测弹性仪。

2. 电光效应

电光效应（克尔效应）：电场可以使某些各项同性的透明介质变为各项异性，而使光产生双折射。

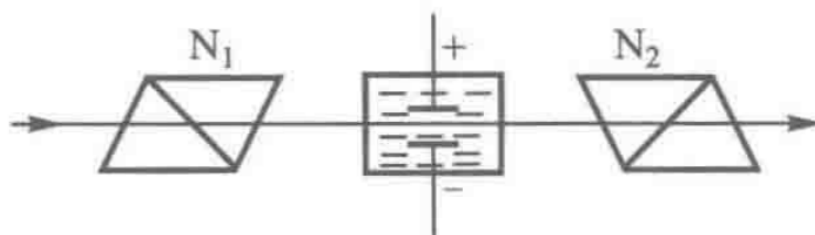


图 5-33 克尔效应示意图

原理：加电场 $\vec{E}$ 以后，电容器两极板之间的液体获得单轴晶体的性质，光轴沿电场方向。得到：

$$n_o - n_e = kE^2$$

相位差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d_0 = \frac{2\pi}{\lambda}d_0kE^2$$

k 称为克尔常量，与液体有关。中间的装置称为**克尔盒**，是装有平板电极并盛有特定液体的玻璃盒。

给定平板间距离 d ，电场 $E = \frac{V}{d}$ ，得

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d_0k\frac{V^2}{d^2}$$

克尔效应与电场的二次方成正比，称为**二次电光效应**，也称为**非线性电光效应**。

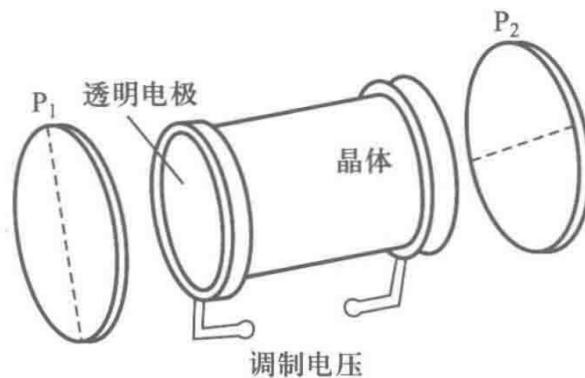


图 5-34 纵向泡克尔斯效应示意图

泡克尔斯效应：是一种线性的电光效应。外加电场平行于光的传播方向，称为**纵向泡克尔斯效应**，垂直的则称为**横向泡克尔斯效应**。

装置是两块透镜方向相互垂直的偏振片，中间夹一块磷酸二氢钾（KDP）晶体，电极常用透明的金属氧化物镀层、网栅或环制成。晶体不加电场时是单轴晶体，光轴沿光束的传播方向。

晶体光学理论指出沿光轴方向加电场后，垂直于电场的平面上存在着两个互相垂直的主振动方向。一束线偏振光垂直入射时，若光振动方向与主轴方向成 45° 夹角，那么这束偏振光可以分解为两个振幅相等、互相垂直的线偏振光，有一个固定的相位差为：

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_{max} - n_{min})d_o$$

其中 $n_{max} - n_{min}$ 称为**感生折射率差**，满足公式：

$$\begin{cases} n_{max} = n_o + \frac{1}{2}n_o^3\gamma E \\ n_{min} = n_o - \frac{1}{2}n_o^3\gamma E \end{cases}$$

γ 是电光系数，与晶体取向有关。相位差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}n_o^3\gamma d_o E = \frac{2\pi}{\lambda}n_o^3\gamma V$$

ADP 晶体是一个在电场作用下的特殊波片，通过施加不同的外加电场即改变外加电压，可以控制相位的变化。电光效应显著的晶体称为电**光晶体**。

3.磁光克尔效应

磁光克尔效应：各向异性介质在强磁场作用下出现的各向异性现象。

$$n_o - n_e = \lambda_o c H^2$$

c 是磁光克尔效应。

5.11 旋光效应

1.旋光现象

旋光现象：线偏振光通过物质后振动面发生旋转的现象。

旋光性物质：能够使线偏振光的振动面发生旋转的物质。

实验步骤：将两偏振片垂直放置，利用相较于亮度更容易分辨的暗度来判断偏振方向。开始时市场是暗的，在两偏振片之间放入一个石英薄片，则视场变亮。将检偏器转过某一角度，视场恢复原来的暗度，这说明偏振方向发生了旋转。

旋光度：晶片厚度为1毫米时偏振方向转过的角度。

对不同波长的光旋光度不同，用白光照射时可以看到彩色，转动任一个偏振片彩色改变，称为**旋光色散**。

迎面观察，顺时针——**右旋**；逆时针——**左旋**。光的传播方向改变时，旋光的方向也改变。

(1) 光沿晶体的光轴传播时也会发生旋光现象，但一部分被双折射现象掩盖；(2) 部分立方晶系的晶体不呈现双折射现象，但有旋光性质，旋光度和取向无关；(3) 旋光现象还可能在某些液体中出现；(4) 大多数旋光物质的旋光性都有右旋和左旋，数值总是彼此相等，只是符号相反。

实验规律：旋转角度 ψ ，路程长度 l ，旋光性溶质浓度 C ，旋光率 α ：

$$\psi = \alpha l C \quad (5-31)$$

2.旋光现象的解释

圆双折射：线偏振光在旋光晶体中沿光轴传播时可分解成左旋和右旋圆偏振光。（菲涅耳的唯象理论）

左旋和右旋圆偏振光的传播速度略有不同，导致不同的相位滞后，从而使合成线偏振光的电矢量有一定角度的旋转。

左右旋圆偏振光：

$$\begin{aligned}\vec{E}_L &= A_0[\vec{e}_x \cos(\omega t - k_L z) + \vec{e}_y \sin(\omega t - k_L z)] \\ \vec{E}_R &= A_0[\vec{e}_x \cos(\omega t - k_R z) - \vec{e}_y \sin(\omega t - k_R z)]\end{aligned}\quad (5-32)$$

合成光：

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_L + \vec{E}_R \\ &= 2A_0[\vec{e}_x \cos\left(\frac{k_R - k_L}{2}z\right) + \vec{e}_y \sin\left(\frac{k_R - k_L}{2}z\right)] \cdot \cos\left[\omega t - \frac{k_R + k_L}{2}z\right] \\ &= 2A_0(\vec{e}_x \cos\theta + \vec{e}_y \sin\theta) \cos(\omega t - \theta)\end{aligned}\quad (5-33)$$

式中 $\theta = \frac{k_R - k_L}{2}$ ，振动的x分量和y分量对时间有相同的依赖关系，都取决于 $\cos(\omega t - \theta)$ ，因此是同相位的。在z轴上的任一点，其合成波仍然是线偏振波。然而前一项 $\vec{e}_x \cos\theta + \vec{e}_y \sin\theta$ 表现出与z轴相关的性质，光波刚到达晶体表面（ $z = 0$ ），合成波的矢量为

$$\vec{E} = \vec{e}_x 2A_0 \cos\omega t \quad (5-34)$$

从此处开始，当z轴上的坐标值增大时，需要转过一个角度 ψ ，转过的角度满足

$$\begin{aligned}\tan\psi &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \\ \psi &= \theta = \frac{k_R - k_L}{2}\end{aligned}\quad (5-35)$$

$\psi > 0 \rightarrow$ 相对x轴逆时针转动 $\rightarrow$ 左旋； $\psi < 0 \rightarrow$ 相对x轴顺时针转动 $\rightarrow$ 右旋。与折射率的关系：

$$\psi = \frac{\pi}{\lambda_0}(n_R - n_L)d \quad (5-36)$$

正负同样代表左旋右旋。

3.磁致旋光效应

磁致旋光性：线性光通过处于通电螺线管磁场中的物质时振动面发生旋转。这个现象称为**法拉第旋光效应**。

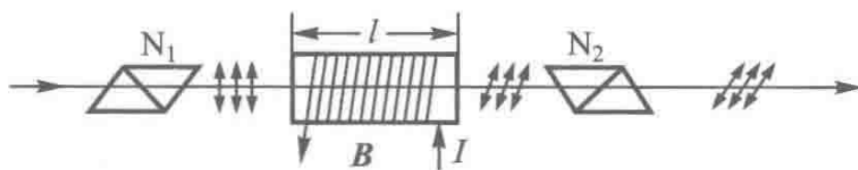


图 5-40 磁致旋光装置示意图

在两个正交的尼科耳棱镜之间放一个螺线管，管内放入有磁致旋光性的物质。不加磁感应强度时，线偏振光不能透过 N_2 。当螺线管通电后偏振光有一分量能通过，把 N_2 转动一个角度后偏振光又不能通过，说明振动方向转过了一个角度。给出**维尔德系数** V ，则角度为：

$$\varphi = VBl \quad (5-37)$$

维尔德系数与物质的性质、温度及入射光波长有关，一般都比较小。

磁致旋光也有右旋和左旋两种，右旋物质的系数为规定为正的。

对于每一种给定的物质，方向仅由磁场方向决定，和光线的传播方向无关，这是**磁致旋光**和**天然全光线向不同的地方**。

把具有天然旋光性的物体放在磁场中，天然旋光本领和磁致旋光本领相加。

铁磁性物质的旋转角正比于磁化率。所有的左旋物质都含有顺磁性原子，但很多顺磁物质以及抗磁物质都是右旋的。

磁致旋光角度的数值随波长而变。

应用：光隔离器，磁光调制器，磁光传感器。

微观原因：外磁场存在时物质的原子或分子中的电子进动。

5.12 偏振态的矩阵表述简介

作用：使繁琐的光学问题简洁化，并可以用计算机进行运算。

设沿z轴传播的椭圆偏振光的光矢量在xy坐标轴上的投影分别为

$$\begin{cases} E_x = E_{0x}e^{-i(\omega t - kz + \varphi_{0x})} = E_{0x}e^{-i\omega t}e^{i\varphi_x} \\ E_y = E_{0y}e^{-i(\omega t - kz + \varphi_{0y})} = E_{0y}e^{-i\omega t}e^{i\varphi_y} \end{cases} \quad (5-38)$$

略去公因子 $e^{-i\omega t}$ ，用复振幅表示：

$$\begin{cases} \widetilde{E}_x = E_{0x}e^{i\varphi_x} \\ \widetilde{E}_y = E_{0y}e^{i\varphi_y} \end{cases} \quad (5-39)$$

琼斯矢量：任意偏振光可以由它的光矢量的两个分量构成的列矩阵来表示：

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}} \begin{pmatrix} \widetilde{E}_x \\ \widetilde{E}_y \end{pmatrix} \quad (5-40)$$

表 5-1 各种偏振态的琼斯矢量

偏振态		示意图(图 5-41)	琼斯矢量
线偏振光	光矢量沿 x 轴		$E_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
	光矢量沿 y 轴		$E_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
	光矢量与 x 轴成 $\pm\frac{\pi}{4}$		$E_{\pm\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$
	光矢量与 x 轴成 $\pm\theta$		$E_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \pm \sin \theta \end{pmatrix}$
圆偏振光	右旋		$E_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$
	左旋		$E_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

第6章 光的吸收、散射和色散

光通过物质的两种变化:

- (1) 光束越深入, 物质强度越减弱。由于一部分光的能量被物质吸收, 一部分光被散射。
- (2) 光在物质中传播的速度小于真空中的速度, 且随频率变化, 称为色散现象。

6.1 电偶极辐射对反射和折射现象的解释

1. 电偶极辐射

光的经典理论：物质中的原子、离子或分子中的电荷在入射光电矢量的作用下作受迫振动。用一组简谐振子来代替这些粒子，每一振子可认为是一个电偶极子。

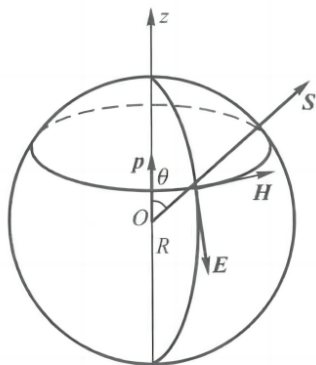


图 6-1 电偶极辐射

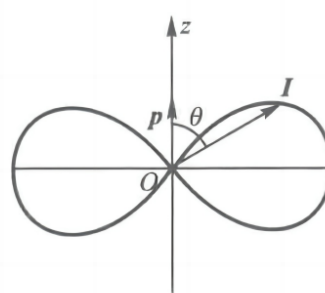


图 6-2 波的强度
与 θ 间的关系

如图，设 z 为电子离开原点的距离，设正电荷静止在坐标原点。电偶极矩 $\vec{p} = e\vec{z}$ ， $z = A \cos \omega t$ ，电偶极子辐射的电磁波的电矢量和磁矢量的值分别为

$$E = \frac{eA}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \omega^2 \sin \theta \cos \omega(t - \frac{R}{c})$$

$$H = \frac{E}{\mu_0 c}$$
(6-1)

真空中坡印廷矢量

$$|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = EH = \frac{1}{\mu_0 c} E^2$$

介质中

$$|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_r \mu_0}} E^2 = n \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \frac{n}{\mu_0 c} E^2$$

真空中坡印廷矢量的平均值，即波的强度

$$\bar{S} = \bar{I} = \frac{1}{\mu_0 c} \bar{E}^2 = \frac{\mu_0 e^2 A^2 \omega^4}{32\pi^2 c R^2} \sin^2 \theta$$
(6-2)

在半径为 R 的球面上各点相位都相等，是一球面波，且相位较圆点处落后 R/c 。但振幅则随 θ 角而变，引起波的强度（能流密度）在同一波面上的不均匀分布。 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ， I 最大； $\theta = 0$ ， $I = 0$ 。

2.电偶极辐射对反射和折射现象的初步解释

可见光波长比构成物质的原子或分子的限度大三个数量级，因此在密度均匀的固态或液态物质中，可以认为在光的一个波长范围内，分子的排列是非常有规律且非常密集，甚至是连续的。通过时，各分子依次按入射光到达该分子时的相位作受迫振动，依次发出次级电磁波，所有这些次级电磁波彼此间都保持一定的相位关系。

反射和折射：两种介质界面上分子性质的不连续。

布儒斯特定律：是在折射率为 n_2 的介质中，一个分子电偶极子在 E_2 的作用下沿平行于它的 z 轴方向做受迫振动时所辐射的磁波。反射光方向垂直于折射光时，恰好和 z 轴平行，因此在这个方向上没有磁波，所以没有反射光。

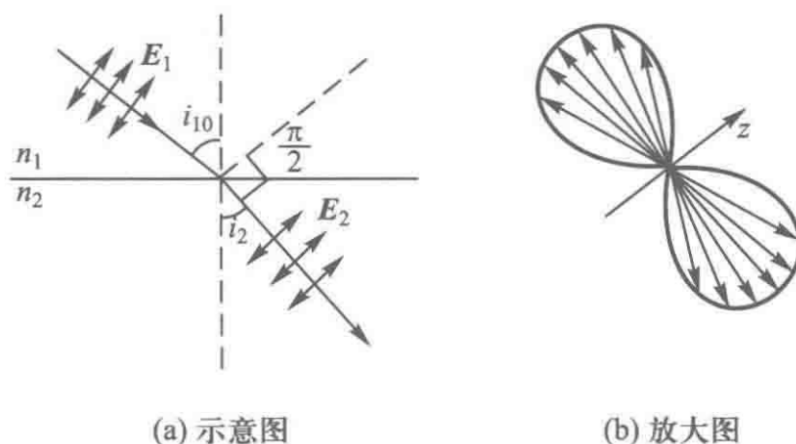


图 6-3 电偶极子的观点说明布儒斯特定律

6.2 光的吸收

1.一般吸收和选择吸收

一般吸收：物质吸收光辐射或光能流的一般属性。特点是吸收很少，并且在某一给定波段内几乎不变。

选择吸收：物质对某一波段的光强烈吸收。特点是吸收的很多，并且随波长而剧烈的变化。

2.朗伯定律

光通过物质时，光的一部分能量用来供给受迫振动。这时物质粒子若和其他原子或分子发生碰撞，振动能量就可能转化成平动动能。使分子热运动的能量增加。

朗伯定律：光在同一吸收物质内，通过同一距离后，光能量将有同样百分比的能量被吸收。定义吸收系数 $\alpha_a(\lambda)$ ：

$$I = I_0 e^{-\alpha_a(\lambda)d} \quad (6-3)$$

在线性光学范围内，吸收系数为线性微分方程解，故为线性规律。对于非线性光学，吸收系数依赖于光的强度，朗伯定律不再成立。

比尔定律：溶液的吸收系数正比于溶液的浓度。此定律主要适用于稀溶液，即分子之间关系不密切的物质。有 $\alpha_a(\lambda) = AC$ ，其中 A 是一个与浓度无关的常量。光强

$$I = I_0 e^{-ACd} \quad (6-4)$$

当溶液浓度很大时，分子间的相互影响不能忽略，比尔定律不成立，但朗伯定律仍成立。

3.吸收光谱

吸收光谱：连续光谱通过有选择吸收的介质后，某些线段或某些波长的光被吸收得到的光谱。

稀薄的原子气体的吸收波段很窄。气压增高时，气体原子间距减小，彼此间相互作用增强，吸收谱线变得模糊。

6.3 光的散射

光的散射：灯光束通过光学性质不均匀的物质时，从侧向可以看到光。遵循如下的指数规律：

$$I = I_0 e^{-(\alpha_a + \alpha_s)d} = I_0 e^{-\alpha d} \quad (6-5)$$

其中 α_a 为吸收系数， α_s 是散射系数， α 是衰减系数

1.均匀介质中散射的经典图像

光学性质的不均匀：可能是由于均匀物质中散布的折射率与它不同的其他物质的大量微粒，也可能是由于物质本身的组成部分的聚集不规则。

杂质微粒的限度一般比光的波长小，间距比波长大，排列无规则。因此在光作用下的振动没有固定的相位关系，在任何观察点看到的总是发出的次级辐射的不相干叠加，各处不相消而形成散射光。

2.散射和反射、漫反射和衍射现象的区别

区别原因：次波发射中心的排列不同。（1）散射是无规则的；（2）直射、反射、折射都是有规则的，且物体的线度远大于波长。

此处的规则是相对的，指不规则的线度远小于光的波长的线度。

漫反射是许多小镜面的反射光的叠加，但在每一小镜面上都满足反射定律。

衍射现象在导致反射或散射的微粒的线度比光的波长大时可以忽略不计。

漫反射和散射是不同的。

3.瑞利散射

瑞利散射：线度小于光的波长的微粒对入射光的散射现象。

瑞利定律：强度按不同的分布可用函数 $f(\lambda)$ 来表示，则散射光的强度的分布为 $f(\lambda)\lambda^{-4}$ 的形式。

考虑(6-2)式：

$$\bar{S} = \bar{I} = \frac{1}{\mu_0 c} \bar{E}^2 = \frac{\mu_0 e^2 A^2 \omega^4}{32 \pi^2 c R^2} \sin^2 \theta$$

沿和 x 轴成 θ 角的方向观察时，散射光强度和振子振动圆频率 ω 的4次方成正比。由于受迫振动的规律，故次波的强度与入射光波长 λ 的4次方成反比。

说明：散射中短波占优势，所以白光散射后呈青蓝色。而直接通过散射物质的光，显得比较红。一般波长长的散射弱，波长短的散射强。

只有在微粒线度比光波的波长小的情况下，才能够观察到这种符合瑞利定律的散射。线度超过波长时，各点入射光相位差不可忽略， λ 的幂次将低于4。

4.散射光的偏振性

自然光发生散射时，正侧方的散射光是线偏振光，斜方向是部分偏振光，正面是自然光。

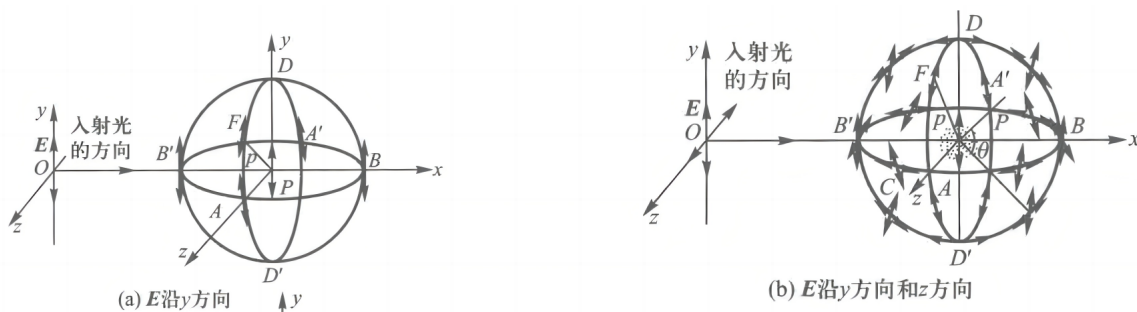


图 6-7 散射光的偏振性

如左图，设自然光射入其中有某种微粒的各向同性介质，在 P 处由受迫振动形成的电矩矢量 $\vec{p}$ 平行于 y 轴，由此产生的次级电磁波是球面波，波的电矢量 $\vec{E}'$ 都是在电偶极子轴 DD' 所在的平面内。赤道平面上各点的振幅最大，矢量越靠近赤道振幅越大；两极振幅等于0，矢量越靠近两极振幅越小。

如右图，当入射光的矢量在 z 轴上振动时，将左图转过90度，一切情况都等价。

以上左右图分别是沿 y 轴和沿 z 轴振动的情况，实际的完整振动是二者的合成。（1）从正侧面方向看，散射光就都是线偏振的（完全沿 y 和 z 两方向的振动的合成），振动面垂直于入射光束的传播方向。（2）纵向未射出完全的线偏振成分，因此仍是自然光。（3）其它方向介于二者之间，是部分偏振光。

对于各向异性分子：分子的电荷本身不对称，因此情况变得复杂。

退偏振：用线偏振光照射某些气体或液体，从侧向观察时，散射光变成部分偏振的。

部分偏振光的偏振度：

$$P = \left| \frac{I_y - I_x}{I_y + I_x} \right|$$

退偏振度

$$\Delta = 1 - P$$

瑞利的理论：退偏振度与散射分子的光学性质各向异性有关，这种分子里电极化的方向一般不与光波的电场矢量方向相同。

5. 散射光的强度

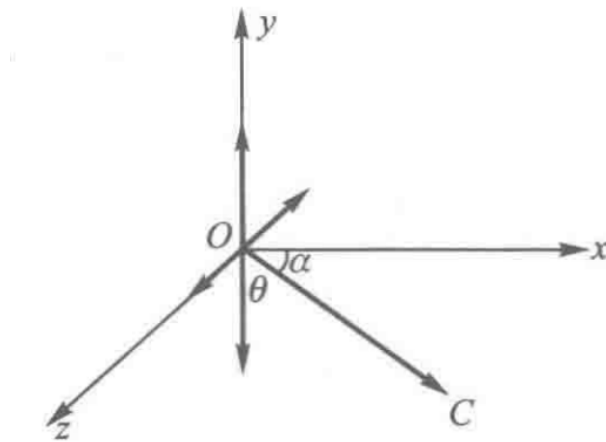


图 6-8 散射光强度的计算

CO 方向的两个分量

$$I_z = \frac{1}{\mu_0 c} \bar{E}_z^2 = \frac{\mu_0 e^2 A^2 \omega^4}{32 \pi^2 c R^2} \sin^2 \theta = \frac{\mu_0 e^2 A^2 \omega^4}{32 \pi^2 c R^2} \cos^2 \alpha = I_0 \cos^2 \alpha$$

$$I_y = \frac{1}{\mu_0 c} \bar{E}_y^2 = \frac{\mu_0 e^2 A^2 \omega^4}{32 \pi^2 c R^2} \sin^2 \frac{\pi}{2} = I_0$$

CO 方向合强度

$$I_\alpha = \frac{1}{\mu_0 c} (\bar{E}_z^2 + \bar{E}_y^2) = I_0 (1 + \cos^2 \alpha) \quad (6-6)$$

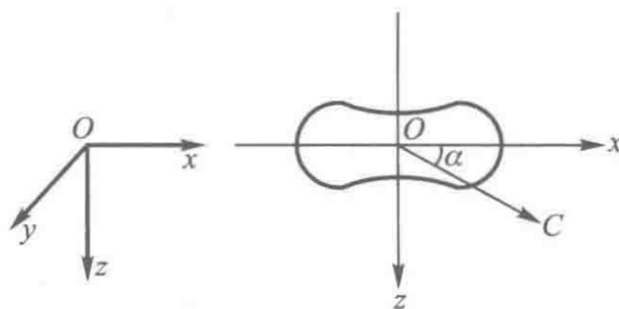


图 6-9 散射光强度的分布曲线

6.分子散射

分子散射：物质分子的无规则运动导致的分子密度的涨落。

大气散射：小部分由悬浮的尘埃产生，大部分是分子散射。后者的尺度比前者小得多，瑞利定律的作用更明显。

米氏散射：散射微粒的半径与可见光的波长可以相比的散射，主要出现在云的散射中。这种散射与波长的关系不大，云雾呈现白色。

6.4 光的色散

1.色散的特点

角色散率 $D = \frac{d\theta}{d\lambda}$ ，同一物质的光谱中，不同波长区内 D 的值是不同的。棱镜的色散光谱中，紫色一端的角色散率比红一端大，谱线排列疏密不一。

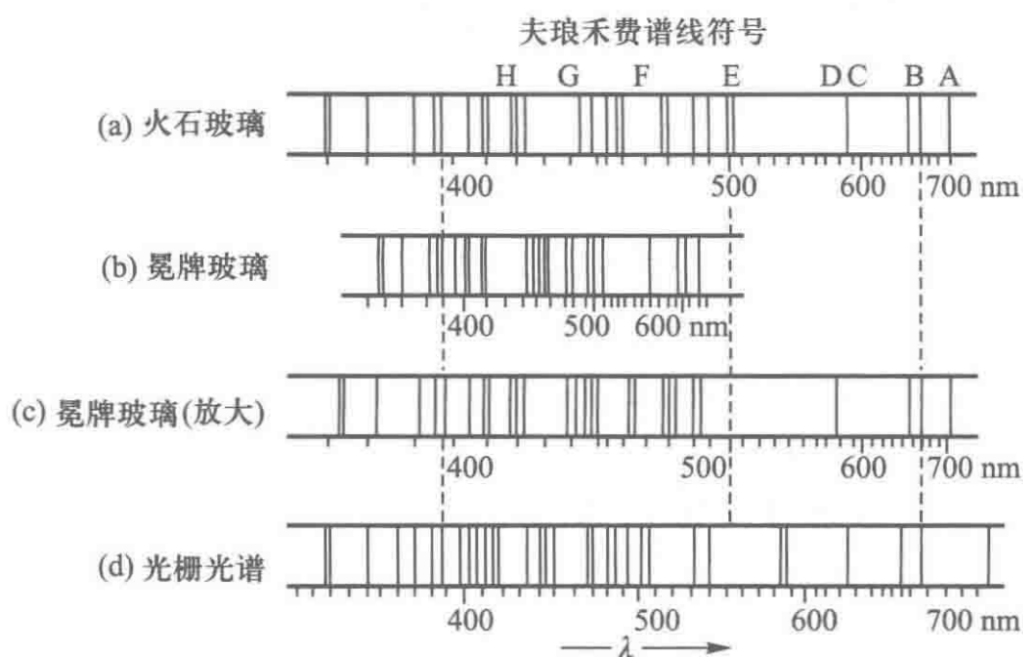


图 6-11 由棱镜和光栅所产生的光谱

(1) 物质的折射率越大，光谱展开的越宽，角色散率越大；(2) 即使将光谱等比例展开的位置也并不完全一致对应各种物质的色彩没有简单的关系。

棱镜角色散率的组成

$$D = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{A}{2}}} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

第一个因数和棱镜的折射棱角有关；第二个因数和棱镜物质的色散特性有关，关键是找出第二个因数在各波长区的值，从而得出 $n = f(\lambda)$ 的函数。

2.正交棱镜观察法

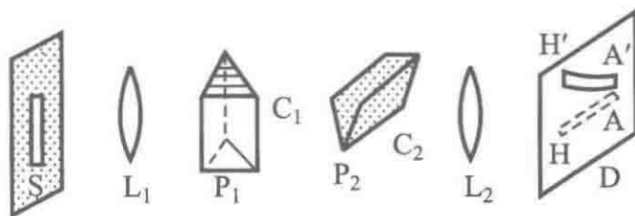


图 6-12 正交棱镜观察法

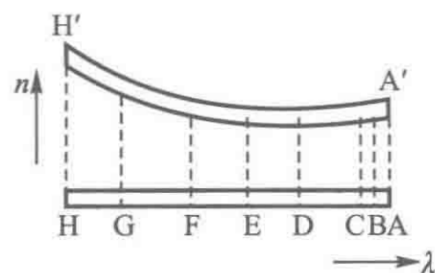


图 6-13 色散图形

如左图，两棱镜的 C_1 、 C_2 两个折射面相互垂直。 C_1 在横向上产生色散， C_2 在纵向上产生色散，色散得到的图形如右图。相的色散产生基本的色散光谱纵向上的色散，由于各种颜色的光折射率不同，从而形成倾斜的线。如果两个棱镜的材料相同，那么 $A'H'$ 是一条倾斜的直线。如果二者的材料不同，由于折射率和波长的关系不同， $A'H'$ 是一条弧线。

弯曲光谱是由棱镜 P_2 使不同波长的谱线移动而形成的，移动的距离随 P_2 材料对各波长的折射率 n 的增大而增大。

这种方法可利用最小偏向角测出棱镜物质分别对不同的已知单色光的折射率。

3.正常色散与反常色散

(1) 正常色散：

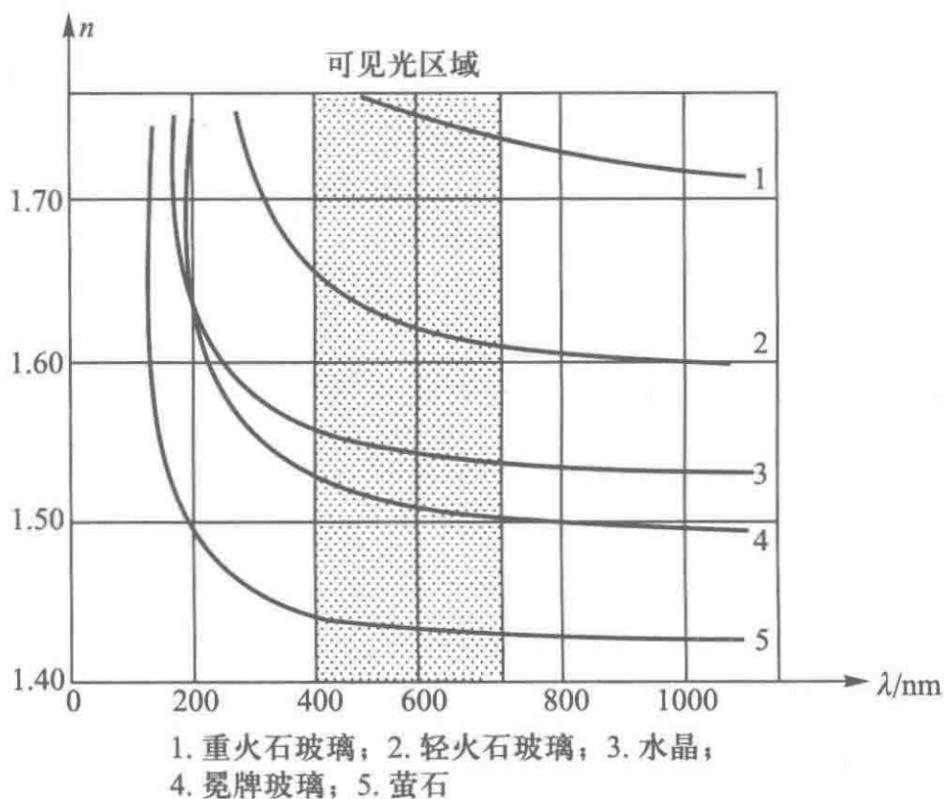


图 6-14 色散曲线

可见光波段附近色散曲线满足**柯西方程**：

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} \quad (6-7)$$

精度要求不高时，波长变化的范围不大，只取前两项，求导得到**材料的色散关系**

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2b}{\lambda^3} \quad (6-8)$$

色散近似地与波长的三次方成反比，棱镜光谱是非匀排光谱。

色散曲线特点：

1°. 波长越短折射率越大；2°. 波长越短， $dn/d\lambda$ 越大，因而角色散率也越大；3°. 在波长一定时，不同物质的折射率越大， $dn/d\lambda$ 也越大；4°. 不同物质的色散曲线没有简单的相似关系。

(2) **反常色散**：色散光谱中部分波长被吸收，从而无法显现出完整的色散。

反常分散总是与光的吸收有密切关系，任何物质在光谱某一区域内如有反常色散，则在这个区域内光被强烈的吸收，在靠近吸收处折射率的变化非常快，波长较长的一边的折射率比较短的一边总是大的多。

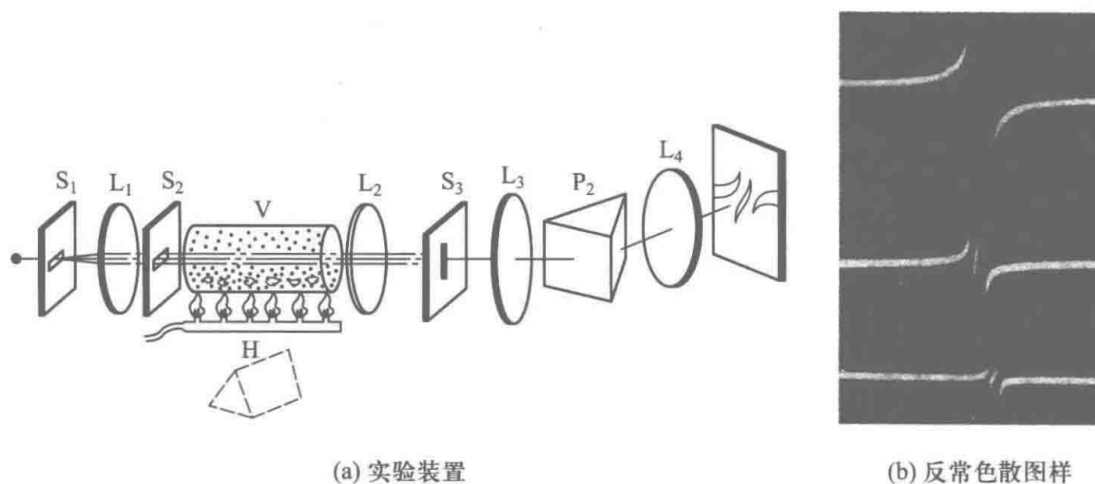


图 6-17 反常色散实验装置及实验结果

实验：在容积 V 内充满钠蒸气，由于钠蒸气上下温度不同，从而密度不均匀，因此可以产生色散。这样得到右边出现的谱线形式，此谱线分为三段，分别在 589nm 和 589.6nm （钠原子光谱的精细结构）附近出现特殊的弯曲而断开。

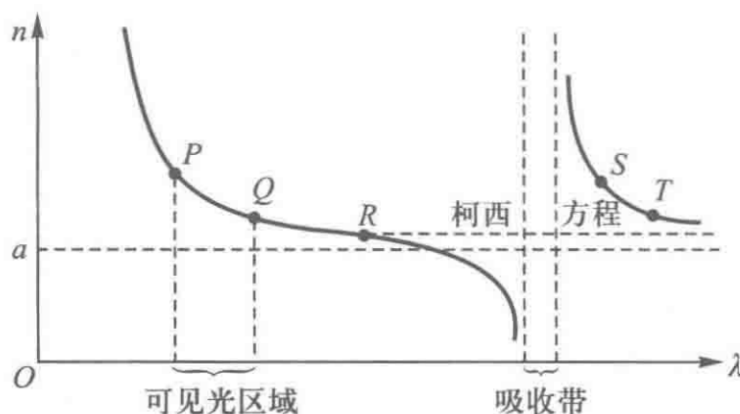


图 6-18 正常色散与反常色散曲线

反常色散的曲线如图。对于一般物质到达，红外区域的某一波段时，光不能透过，形成一个选择吸收区域（吸收带）。它的位置取决于各种物质的特性。越过吸收区域到长波的一边，折射率数值突然增大。波长继续增加时，折射率下降得很快。当离开吸收区域渐远时，曲线接近一个渐近线。

普遍的孔脱定律：任何物质在红外或紫外光谱中，只要有选择吸收存在，在这些区域中就表现出反常色散。反常色散实际上也是很普遍的现象。

对无线电波和微波区这种波长较长的波段进行类似的测定，发现这段的折射率几乎已与波长无关。对波长较短的波段进行测定，发现折射率略小于1。是短波在冷静物质中的传播速度比真空要快。

6.5 色散的经典理论

麦克斯韦理论：折射率是与电容率 ϵ 联系的常量与光波频率无关。

洛伦兹的经典电子论：电磁场频率与电容率有关，从而与折射率产生关系。

对电极化强度 $\vec{P}$ 有:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \varepsilon_r = 1 + \chi = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} \quad (6-9)$$

与前面相同, 认为正电荷是不动的, 负电荷的位置用 $\vec{r}$ 来表示, 电偶极矩为 $\vec{p} = q\vec{r}$, 一个电荷在外电场 $\vec{E}$ 作用下的振动有三个力: 外电场的强迫力 qE ; 准弹性力 $-\beta r$, 劲度系数 β ; 阻尼力 $-\gamma \frac{dr}{dt}$, 阻尼系数 γ 。

受迫振动方程可写为

$$qE - m\beta r - m\gamma \frac{dr}{dt} = m \frac{d^2 r}{dt^2}$$

假设电矢量 $E = E_0 e^{i\omega t}$, 令 $\omega_0^2 = \beta$, 得到的稳态解为

$$r = \frac{\frac{qE_0}{m} e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

电极化强度

$$P = Nqr = \frac{\frac{Nq^2}{m} E_0 e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} = \frac{\frac{Nq^2}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} E$$

折射率 n 满足以下关系

$$n^2 - 1 = \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} - i \frac{A\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \quad A = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \quad (6-10)$$

以上的折射率为复数, 但是一般的折射率为实数, 则要求右面的虚部等于0, 但是和原来假设的阻尼力不等于零不符。对入射光电矢量进行修正为

$$E = E_0 \exp[i\omega(t - \frac{x}{v})] = E_0 \exp[i\omega(t - \frac{nx}{c})] \quad (6-11)$$

衰减波

$$E = E_0 \exp[-\sqrt{\alpha_a} x + i\omega(t - \frac{x}{v})] = E_0 \exp\{i\omega[t - \frac{nx}{c}(1 - i \frac{c}{n\omega} \sqrt{\alpha_a})]\}$$

对吸收系数 α_a , 有

$$\frac{c}{n\omega} \sqrt{\alpha_a} = k, \quad n(1 - ik)$$

n' 称为**复折射率**。用 n' 代替原式, 则

$$\begin{aligned} n'^2 - 1 &= n^2(1 - ik)^2 - 1 = [n^2(1 - k^2) - 1] - 2in^2k \\ &= \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} - i \frac{A\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \end{aligned} \quad (6-12)$$

改用波长 λ 表示:

$$n^2(1 - k^2) = 1 + \frac{b\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_0^2) + \frac{g\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)}} \quad (6-13)$$

有多种带电粒子时：

$$n^2(1 - k^2) = 1 + \sum_i \frac{b_i \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_i^2) + \frac{g\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_i^2)}} \quad (6-14)$$

此式进行展开即得柯西方程。

第7章 光的量子性

7.1 光速“米”的定义

1. 光速的实验室测定

迈克耳孙旋转镜法：将两个凹面镜A和B分别设置在相距35373.21m的两个山峰上。从光源S发出的光如图，按如图所示的光路行进。八面镜R可以旋转，当实现光来回一次所经历的时间内，棱镜恰好转过1/8周时，可以精确地测定光来回反射所需的时间。从而测定光速。在迈克耳孙的实验中，棱镜的旋转速度为528r/s。

缺点：会受到空气不均匀性的影响，而不均匀性无法测量。

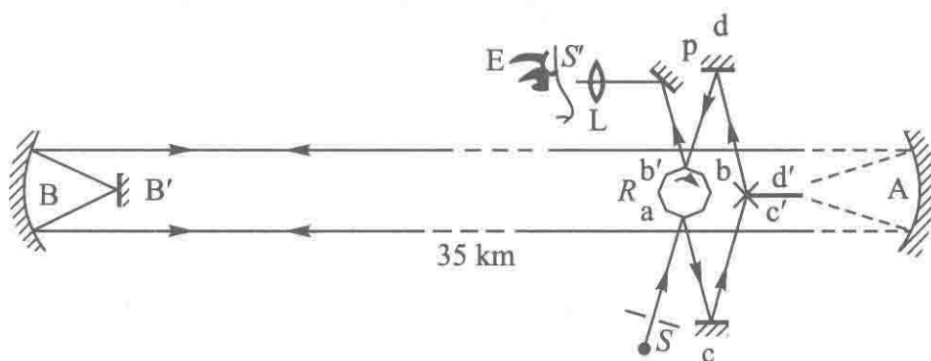


图 7-1 旋转棱镜法测光速

克尔盒遮断法：将一频率固定的交流电压同步的接在两个克尔盒 K_1 和 K_2 上。用尼科耳棱镜滤光，仅当电压加在盒上时，光才能通过这个系统。利用已知的电压频率来测量遮断和重现的时间间隔。

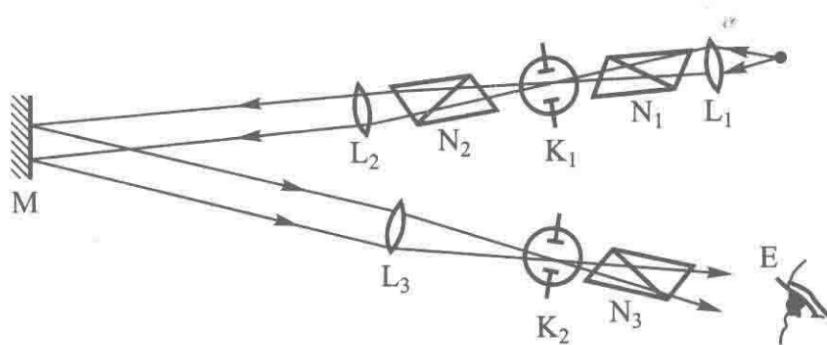


图 7-2 遮断法测光速

光速的最可靠值： $c = 299792458m/s$ 。

2.长度单位“米”的定义

米：光在真空中 $\frac{1}{299792458}$ s 时间间隔内所经路径的长度。这个定义将光速变为定义值，不确定度为0，不需要再进行任何测量。

秒：铯133原子基态的两个超精细能级之间跃迁，所对应的辐射的9192631770个周期的持续时间，即频率为9.193GHz。这个值的精确度是物理量中最高的，但是很难测量。

2018年：千克、安培、开尔文、摩尔分别由普朗克常量、元电荷、玻耳兹曼常量、阿伏伽德罗常量定义。

3.光的相速度和群速度

(1) **相速度：**相位传播的速度。

波的表达式：

$$E = A \cos(\omega t - kr) \quad (7-1)$$

相位不变的条件为 $\omega t - kr = \text{常量}$ ，得到微分式：

$$\omega dt - kdr = 0 \text{ or } \frac{dr}{dt} = v = \frac{\omega}{k} = \nu\lambda \quad (7-2)$$

相速度是严格的单色波所特有的一种速度。这种严格的单色波的空间延续和时间延续。都是无穷无尽的正弦波。这是一种理想模型。实际的任何形式的脉动都可看成是无限个波叠加而成的，可以写成傅里叶级数或傅里叶积分的形式。真空中这些脉动可以都以同一相速度传播。但是在介质中各个单色平面波分别以不同的相速度传播，大小随频率而变，因此叠加成的脉动在传播时不断改变形状。

(2) **群速度：**脉动传播的速度。

假设脉动有两个频率相近且振幅相等的单色简谐波叠加而成：

$$\begin{aligned} E_1 &= A \cos(\omega_1 t - k_1 r) \\ E_2 &= A \cos(\omega_2 t - k_2 r) \end{aligned} \quad (7-3)$$

设两个色波的频率和波长相差很小：

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_0 + \delta\omega, \quad \omega_2 = \omega_0 - \delta\omega \\ k_1 &= k_0 + \delta k, \quad k_2 = k_0 - \delta k\end{aligned}$$

代入求和，得到：

$$E = E_1 + E_2 = 2A \cos(t\delta\omega - r\delta k) \cos(\omega_0 t - k_0 r) = A_0 \cos(\omega_0 t - k_0 r) \quad (7-4)$$

A_0 决定振幅的变化，使脉动变成振幅缓慢变化的简谐波。选定一个具有一定数值的 A_0 点，计算向前的速度即为群速度。

群速度既是波的一定振幅向前推进的速度，也是能量传播速度。

信息的传递速度是相速度，能量的传播速度是群速度。

令 A_0 不变时，有群速度

$$u = \frac{\delta\omega}{\delta k} \quad (7-5)$$

单色波的特征在于用相速度 $v = \frac{\omega}{k}$ 表示一定相位的推进速度，而任何脉动的一般特征在于用群速度 $u = \frac{\delta\omega}{\delta k}$ 表示一定振幅的推进速度。考虑群速度时注意到各个成分波的相速度是随波长而变的，因此得到任何脉动的一般瑞利公式：

$$u = v - \lambda \frac{\delta v}{\delta \lambda} \quad (7-6)$$

$dv/d\lambda$ 表示相速度随波长的变化率。由于折射率的定义为 $n = c/v$ ，二者之间存在联系。只有在有色散介质中才必须区分群速度和相速度，在真空中则没有区别的。

瑞利对实验的解释：测定光速时所用的都是合成的波，在色散物质中测量到的都是群速度而不是相速度。迈克耳孙的二硫化碳折射率测量中，直接测量的是相速度的比值为1.64，而测量光速得到的群速度比值为1.75。

7.2 经典辐射定律

1. 热辐射 基尔霍夫定律

(1) 物体向外辐射时要消耗能量，维持辐射需要补充能量，根据补充能量的方式不同有以下几类：

化学发光：辐射过程中物质内部发生化学变化。

光致发光：用外来的光或任何其他辐射不断的或预先的照射物质使之发光。

场致发光：由电场作用引起的辐射过程。

阴极发光：通过电子轰击引引固体产生辐射。

以上的发光统称为非热辐射。

(2) 热辐射：物体处于一定温度的热平衡状态下的辐射。热辐射的光谱是连续光谱，辐射谱的性质与温度有关，但不一定需要高温，而是任何温度下都可发出一定的热辐射。

热辐射的辐射能 W ，有

$$dW = M(\nu, T)d\nu \quad (7-7)$$

单色辐射出射度（单色辐出度）： $M(\nu, T)$ ，为从物理表面单位面积发出的频率在 ν 附近的单位频率间隔内的辐射功率。单位为 W/m^2 。

物体的辐射出射度（辐出度）：从物体表面单位面积上发出的各种频率的总辐射功率。

$$M_0(T) = \int_0^\infty dW = \int_0^\infty M(\nu, T)d\nu \quad (7-8)$$

$M_0(T)$ 只是温度的函数，单位 W/m^2 ，对不同的物体 M_0 不同。

(3) 辐射照射到物体表面时，一部分能量被物体散射、反射或透射，另一部分被物体吸收。吸收的辐射能量 dW' ，有**吸收比**：

$$A(\nu, T) = dW'/dW \quad (7-9)$$

吸收比的范围 $0 \leq A(\nu, T) \leq 1$ ，一切物体的吸收比都是随物体的温度和入射的辐射频率而改变的，不同的物体，特别是不同的表面，吸收比也是不同的。

内部真空的容器中的物体只能通过辐射和吸收来交换能量，辐射体发出的能量比吸收多时温度下降，反之，温度上升。发出和吸收的能量相同时建立**热平衡**，此时单色辐出度和吸收比成正比相关。

热平衡的基尔霍夫定律：单色辐出度和吸收比的比值体的性质无关。只是频率和温度的普适函数。

$$\frac{M(\nu, T)}{A(\nu, T)} = f(\nu, T) \quad (7-10)$$

2.黑体辐射

黑体：表面几乎不反射光，能够在任何温度下吸收一切电磁辐射的物体。

黑体也会辐射出光。黑体不完全是黑的。

黑体的吸收比与频率和温度无关，是大小等于1的常量（ $A_b(\nu, T) = 1$ ）。黑体的基尔霍夫定律：

$${}_b \frac{M_b(\nu, T)}{A(\nu, T)} = M_b(\nu, T) = f(\nu, T) \quad (7-11)$$

黑体的模拟：在一个闭合的空腔表面开一个小孔，入射的光只能在空腔中不断反射，几乎被腔壁完全吸收。在实验中可在绕有电热丝的空腔上开一个小孔来实现。

黑体辐射谱的统计结论：黑体辐射谱每一条曲线都有一个极大值。随着温度的升高，单色辐射度迅速增大，曲线的极大值逐渐向短波方向移动。

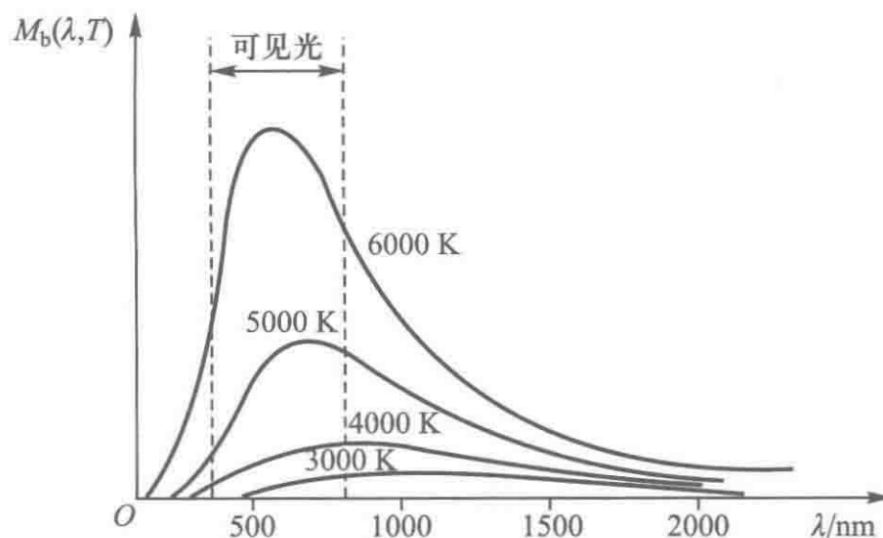


图 7-6 黑体辐射谱按波长分布

斯特藩-玻耳兹曼定律

$$M_0(T) = \int_0^{\infty} M_b(\nu, T) d\nu = \sigma T^4 \quad (7-12)$$

斯特藩-玻耳兹曼常量 $\sigma = 5.67051 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

3. 黑体的经典辐射定律及其困难

维恩的辐出度公式：

$$M_b(\nu, T) = c\nu^2 f\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{c^5}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right) \quad (7-13)$$

维恩位移定律：绝对温度增高时， λ_m 向短波方向移动。

$$T\lambda_m = b \quad (7-14)$$

瑞利-金斯公式：使用能量均分定理研究电磁辐射能量密度按频率分布的情况。

频率型：

$$M_b(\nu, T) = \frac{2\pi}{c^2} \nu^2 kT \quad (7-15)$$

玻耳兹曼常量 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ 。

波长型：

$$M_b(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT \quad (7-16)$$

缺点：紫外灾难。这个函数在长波区域和实验曲线很好的符合，但是频率增大时与实验的差距变大，接近紫外线时，能量趋于无穷。

7.3 普朗克公式

1. 能量子假说

瑞利-金斯的问题：在经典理论中，认为振子能量可连续变化从而导致能量均分定理的误用。

普朗克的能量子假说：振子的能量不能连续变化。只能处于某些特殊的状态，这些状态的能量分离值为 E_0 的整数倍（即能级）。能量的不连续变化称为**能量量子化**，允许变化的最小能量单位 E_0 称为**能量子**，或简称**量子**。量子的能量必须与频率成正比：

$$E_0 = h\nu \quad (7-17)$$

普朗克常量 $h = 6.626 \times 10^{-34} J \cdot s$ 。

玻耳兹曼分布认为 $E = E_0$ 的状态正比于 $e^{-\frac{E}{kT}}$ ，振子平均能量

$$\bar{E}_\nu = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E e^{-\frac{E}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}}} = \frac{h\nu}{e^{-\frac{E}{kT}} - 1}$$

分别代入两种瑞利-金斯公式(7-15,16)，得**普朗克黑体辐射公式**：

$$\begin{aligned} M_b(\nu, T) &= \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \\ M_b(\lambda, T) &= 2\pi h c^2 \lambda^{-5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \end{aligned} \quad (7-18)$$

单色能量密度

$$\omega(\nu) = \frac{4}{c} M(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

低频波段 $h\nu \ll kT$ 展开 $\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ 的幂级数，仅保留到一次项，得到瑞利-金斯公式；高频波段 $h\nu \gg kT$ ，取极限得维恩公式。

光测高温法：根据黑体辐射定律来测定温度。用辐射高温计测得的不是物体的实际温度而是辐射温度，通常低于实际温度。

2. 宇宙辐射背景

根据大爆炸理论，初创时期的宇宙是高度热平衡的一团气体，背景辐射的亮度随频率的分布应该是普朗克的黑体辐射谱。

背景辐射温度： $2.728 \pm 0.004 K$

7.4 光电效应

光电效应：电子在光的作用下从金属表面发射出来。

光电子：光电效应中逸出的电子。

实验装置中， K 为阴极， A 为阳极，二者之间的电压可变。光照射到阴极 K 上，电子从阴极逸出，并受电场加速形成电流，称为**光电流**。入射光的强度和频率不变时，加速电压 V 增加到一定值，光电流达到饱和值 $I_m = ne$ ， n 为逸出光电子的数目。电压减小到零并开始反向时，光电流没有降为0，说明光电子具有初动能。反向电压等于 $-V_g$ 时，光电流降为0，这个电压称为**遏止电压**。

光电子的初动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv_m^2 = eV_g \quad (7-19)$$

光的频率越高， V_g 越大，频率 ν 与 V_g 呈线性关系。频率低于 ν_0 的光不论强度多大，都不能产生光电子，称为**截止频率**或频率的**红限**。

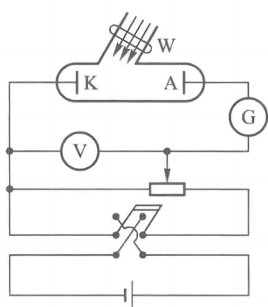


图 7-11 光电效应实验装置

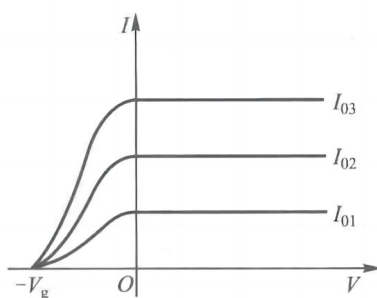


图 7-12 光电伏安特性曲线

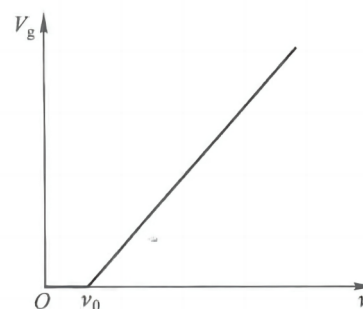


图 7-13 光电效应中的截止频率

光电效应的规律：

(1) 饱和电流 I_m 的大小与入射光的强度成正比。单位时间内逸出的光电子数目与入射光的强度成正比。

(2) 电子的最大初动能或遏止电压与入射光的强度无关，与入射光的频率有关。频率越高，光电子的能量越大。

(3) 频率低于截止频率的入射光，无论光的强度多大，照射时间多长，都不能使光电子逸出。

(4) 光的照射和光电子的溢出几乎是同时的，测量精度（ $< 10^{-9}s$ ）范围内，观察不出滞后现象。

光电效应与波动理论的矛盾：

(1) 电磁理论认为光越强，电子接受的能量越多，释放的电子动能也越大。

(2) 释放电子主要决定于光强，与频率无关。

(3) 电子需要一段时间来吸收光能量。

7.5 爱因斯坦的量子解释

1. 光子假设 光电方程

爱因斯坦的解释：(1) 光在传播过程中具有波动的特性，在光和物质相互作用的过程中，能量集中在一些叫做光量子或称光子的粒子上。产生光电效应的光是光子流，单个光子的能量与频率成正比，即 $E = h\nu$ 。(2) 一个光子的能量传递给金属中的单个电子。电子吸收一个光子后，能量的一部分用来挣脱金属的束缚，余下的一部分变成初动能。因此有**爱因斯坦光电效应方程**：

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + W \quad (7-20)$$

$\frac{1}{2}mv^2$ 为光电子的最大动能， W 称为逸出功。

2. 对光电效应的量子解释

(1) 入射光的强度是由单位时间到达金属表面的光子数目决定的。饱和电流与逸出的光电子数成正比，即与达到金属表面的光子数成正比，与入射光的强度成正比。

(2) 由方程(7-20)，光子的频率 ν 越高，光电子的最大动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 越大。

(3) $h\nu < W$ ，入射光的频率过低，电子无法脱离金属表面。 $\nu > \nu_0 = \frac{W}{h}$ 射光的频率足够高，电子才能脱离金属。极限频率所对应的波长称为**光电效应的红限**。对于容易失去电子的金属如碱金属，红限在可见光区域内，其它大部分都在紫外区域。

(4) 因为金属中的电子能够一次全部吸收入射的光子，光电效应的产生无需积累能量的时间。

一定面积的光子个数 N ，则光通量 $\Phi = Nh\nu$

3. 遏止电压与入射光频率的关系

由能量守恒，结合光电方程，得到： $E_k = qV_g = \frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W = h(\nu - \nu_0)$ ，这样的遏止电压 V_g 关于频率 ν 的函数就是一条直线。这个实验由密立根完成。直线斜率：

$$\frac{h}{e} = \frac{AB}{BC} = 3.9 \times 10^{-15} V \cdot s$$

得到的普朗克常数理论值为： $h = 3.9 \times 10^{-15} V \cdot s \times 1.6 \times 10^{-19} C = 6.2 \times 10^{-34} J \cdot s$

实验值为： $h = 6.57 \times 10^{-34} J \cdot s$

不同实验得到的广泛接受值： $h = 6.626 \times 10^{-34} J \cdot s$

电极板材料不同的情况：用导线连接时，阴极 K 和阳极 A 有电势差，接触电势差为：

$$V_{ka} = \frac{W_a - W_k}{e}$$

使光电流为0的条件为：

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = e(V_g + V_{ka}) = eV_g + W_a - W_k \quad (7-21)$$

与爱因斯坦光电方程比较得到：

$$eV_g = h\nu - W_a \quad (7-22)$$

即直线的截距由阳极的逸出功决定，斜率则与逸出功无关。

4.光子的质量和动量

按照狭义相对论，光子的质量：

$$m_\varphi = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \quad (7-23)$$

质量和速度的关系：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7-24)$$

要令光子以 $v = c$ 运动，则静质量必须为零。

由狭义相对论动量关系：

$$E^2 = p^2c^2 + mc^4 \quad (7-25)$$

静质量 $m_0 = 0$ 代入，光子的动量为：

$$p_\varphi = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \quad (7-26)$$

5.光压

光具有动量，由于动量交换，光的照射会产生机械压力。

证明：（1）光补单具有能量，还有动量。（2）光的物质性，是物质的一种形式。

光子的动量流密度

$$p = Nmv = N\frac{h\nu}{c}$$

改变量 $\Delta p = 2p$ ，平均光压

$$F = \Delta p = 2N\frac{h\nu}{c}$$

6.光镊

使用激光轰击的动量交换来控制单分子。

原理依据：激光的光束截面上光强分布为中心强，四周弱（左图）。

原理：如中图，一透明微粒在激光束中偏心放置，左侧为两个光子，右侧为一个光子，两侧作用的方向都向外，且左侧是右侧的两倍，于是微粒被拉向左侧。（想象是一个气流去推动，一直向左下施压）如右图，作用上三个这样的力即可平衡，于是实现对单个微粒的控制。

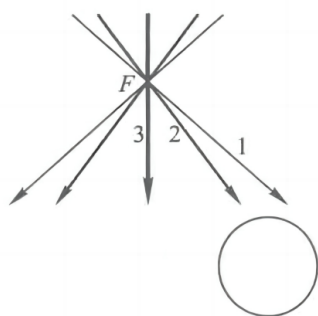


图 7-15 微粒在不均匀光强照射下

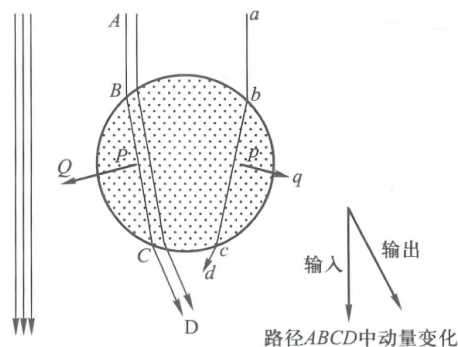


图 7-16 微粒左右二端受光子冲量不相同

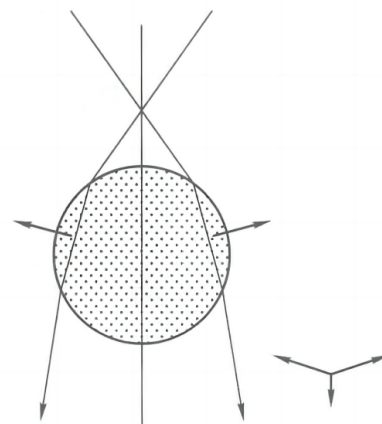


图 7-17 微粒受到三力平衡

优点：

- (1) 不影响被操控的分子；
- (2) 探测灵敏度为 $pN = 10^{-12} N$ 、纳米量级，适用于生物分子；
- (3) 对大小与波长相当的微粒，加速度达到 $10^5 g$ ，可快速捕获。

7.6 康普顿效应

康普顿效应：碳、石蜡等的X射线散射中，除了和原射线相同的成分，还有一些波长较短的成分，且波长差随着散射角的大小而变。

用波长 λ_0 的光照射，部分散射光波长变长，波长 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ ，入射方向与散射方向夹角 θ ，则

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2k \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (7-27)$$

其中 $k = (2.4263089 \pm 0.0000040) \times 10^{-12} m$ 为常量。

涉及的是光和个别电子的相互作用，对轻原子都可如此认为。可利用量子论作出如下解释：作用过程中动量和能量都守恒，光子和（几乎的）自由电子发生碰撞发生动量和能量交换，光子能量也减少，频率变小，波长变大。

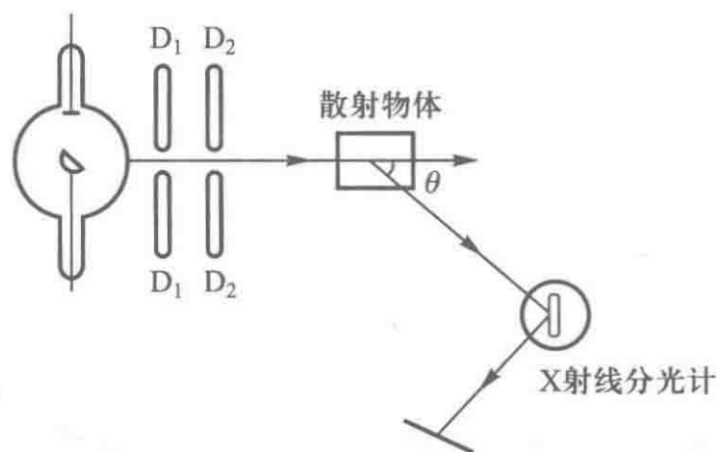


图 7-19 康普顿效应实验装置

研究碰撞时注意，由于反冲速度可能很大，需要注意相对论效应。碰撞的能量守恒式

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2 \quad (7-28)$$

动量守恒式

$$(mv)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - \frac{2h}{c^2}\nu\nu' \cos \theta \quad (7-29)$$

解以上二式的方程组，得到

$$h\nu\nu'(1 - \cos \theta) = m_0c^2(\nu - \nu') \quad (7-30)$$

化为波长形式，有

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (7-31)$$

得到康普顿波长（量纲为 L ）

$$\frac{h}{m_0c} = 0.00241 \approx k$$

康普顿波长也可以理解为散射角为 $\theta = \frac{\pi}{2}$ （射向侧面）的康普顿位移。实验中主要看 $\Delta\lambda/\lambda$ 。

说明：

(1) 同“自由电子”（轻原子中）碰撞波长变短，同紧密束缚的原子或电子碰撞波长几乎不变。

(2) 未考虑原子核的运动，光子能量和电子所受束缚能量相差不大时，主要出现光电效应；大大超过时，主要出现康普顿效应。

7.7 德布罗意波

德布罗意的假设：光具有粒子性，那么实物粒子也可能有波动性。

设没有力场的空间中的粒子具有动量 $p = mv$ ，则可描述为**德布罗意波**或**物质波**，波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (7-32)$$

实物粒子的衍射：通常宏观物体波长很小，可以忽略。1g、1cm/s的物体的波长为 $6.6 \times 10^{-27} \text{cm}$ 。微观粒子波长可测，例如电子波长

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2emV}} \approx 10^{-8} \times \sqrt{\frac{150}{V}} \text{cm} \quad (7-33)$$

加速电压为150V时， $\lambda = 0.1 \text{nm}$ ，和X射线的波长相当，故可以将X射线衍射实验的光源替换为电子源，即**电子衍射实验**。实验应符合布拉格公式

$$2d \sin \alpha_0 = j\lambda$$

d 为晶格常量，使用镍时 ($d = 2.05 \times 10^{-8} \text{cm}$)，加速电压在10 ~ 500V之间。实验时为避开在真空中操作的困难，改为连续改变波长，衍射曲线为：

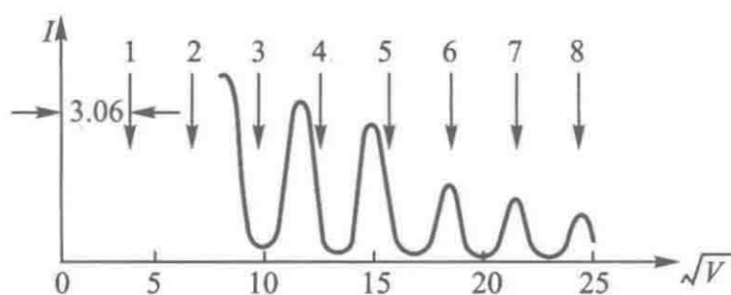


图 7-24 晶体衍射实验曲线

德布罗意波的相速度：

$$v_0 = c \sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{p^2}} \quad (7-34)$$

德布罗意波具有不同动量的相速度在真空中也不相等，也会发生色散。

群速度：

$$u_0 = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{p^2}}} = \frac{c^2}{v_0} \quad (7-35)$$

实物粒子的力学运动速度等于德布罗意波的速度。

德布罗意波的相速度永远比真空光速大。（很炸裂的结论）

7.8 波粒二象性

波粒二象性是一切物质共有的特性。

电子或光子一个一个发射通过衍射晶体时，得到的图像显示为无规则分布，等数量足够大后，依然显出衍射图像。

每一个电子或光子被晶体衍射的现象和其他电子或光子无关，不是相互作用形成的，而是波动性的结果，反应运动轨迹的不确定性。

衍射实验体现了粒子的统计规律。大量衍射——空间统计；单个衍射——时间统计。

统计的波粒二象性：波在空间某点的强度，即振幅绝对值的平方，就是该时刻找到粒子的概率。

此处既不是经典的波，也不是经典的粒子。

和光子联系的电磁波，和物质联系的是物质波，二者不可混淆。

```
1 
```

```
1 \left\{  
2 \begin{align}  
3  
4 \end{align}  
5 \right.
```

推导过程

1.4 实验中干涉条纹的性质

参考文献

主要参考教材：姚启钧,华东师大光学教材编写组.光学教程(第六版)[M].北京:高等教育出版社,2019.